GIỚI HẠN DÃY SỐ

A. LÝ THUYẾT

I. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0.

1. Định nghĩa

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn 0 (hay có giới hạn là 0) nếu với mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó.

Kí hiệu: $\lim u_n = 0$.

Nói một cách ngắn gọn, $\lim u_n = 0$ nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Từ định nghĩa suy ra rằng:

a) $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \lim|u_n| = 0$.

b) Dãy số không đổi (u_n), với $u_n = 0$, có giới hạn là 0.

c) Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 nếu u_n có thể gần 0 bao nhiêu cũng được, miễn là n đủ lớn.

2. Một số dãy số có giới hạn 0

Định lí 4.1

Cho hai dãy số (u_n) và (v_n).

Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Định lí 4.2

Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

Người ta chứng mình được rằng

a) $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

b) $\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$

c) $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ với mọi số nguyên dương k cho trước.

Trường hợp đặc biệt : $\lim \frac{1}{n} = 0$.

d) $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ và mọi $a > 1$ cho trước.

II. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN.

1. Định nghĩa

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L nếu $\lim(u_n - L) = 0$.

Kí hiệu: $\lim u_n = L$.

Dãy số có giới hạn là một số thực gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

a) Dãy số không đổi (u_n) với $u_n = c$, có giới hạn là c.

b) $\lim u_n = L$ khi và chỉ khi khoảng cách $|u_n - L|$ trên trục số thực từ điểm u_n đến L trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được miễn là n đủ lớn; nói một cách hình ảnh, khi n tăng thì các điểm u_n " chụm lại" quanh điểm L.

c) Không phải mọi dãy số đều có giới hạn hữu hạn.

2. Một số định lí

Định lí 4.3

Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó

a) $\lim|u_n| = |L|$ và $\lim\sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$.

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n thì $L \geq 0$ và $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.

Định lí 4.4

Giả sử $\lim u_n = L, \lim v_n = M$ và c là một hằng số. Khi đó

a) $\lim(u_n + v_n) = L + M$.

b) $\lim(u_n - v_n) = L - M$.

c) $\lim(u_n v_n) = LM$.

D) $\lim(cu_n) = cL$.

e) $\lim\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Định nghĩa

Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân có công bội q thỏa $|q| < 1$.

Công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \ldots = \frac{u_1}{1-q}$$

III. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC.

1. Dãy số có giới hạn $+\infty$

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ nếu với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.
Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$.

Nói một cách ngắn gọn, $\lim u_n = +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Người ta chứng minh được rằng:

a) $\lim\sqrt{u_n} = +\infty$.

b) $\lim\sqrt[3]{u_n} = +\infty$

c) $\lim n^k = +\infty$ với một số nguyên dương k cho trước.

Trường hợp đặc biệt : $\lim n = +\infty$.

d) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

2. Dãy số có giới hạn $-\infty$

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ nếu với mỗi số âm tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó.
Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$.

Nói một cách ngắn gọn, $\lim u_n = -\infty$ nếu u_n có thể nhỏ hơn một số âm nhỏ tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Nhận xét:

a) $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty$.

b) Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $|u_n|$ trở nên lớn bao nhiêu cũng được miễn n đủ lớn. Đo đó $\left|\frac{1}{u_n}\right| = \frac{1}{|u_n|}$ trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được, miễn n đủ lớn. Nói cách khác, nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $\lim\frac{1}{u_n} = 0$.

Định lí 4.5

Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $\lim\frac{1}{u_n} = 0$.

3. Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực

Quy tắc 1

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng sau:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc 2

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = L \neq 0$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng sau:

$\lim u_n$	Dấu của L	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Quy tắc 3

Nếu $\lim u_n = L \neq 0$ và $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ kể từ một số hạng nào đó trở đi thì $\lim\frac{u_n}{v_n}$ được cho trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của v_n	$\lim\frac{u_n}{v_n}$
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ GIỚI HẠN DÃY SỐ

DẠNG 1. TÍNH GIỚI HẠN DÃY SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC

Câu 1: $\lim(n^3 - 2n + 1)$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Đáp án D.

Lời giải

Ta có: $n^3-2n+1=n^3\left(1-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Vì $\lim n^3=+\infty$ và $\lim\left(1-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)=1>0$ nên theo quy tắc 2, $\lim\left(n^3-2n+1\right)=+\infty$

Câu 2: $\lim\left(5n-n^2+1\right)$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 5. **D.** -1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $5n-n^2+1=n^2\left(-1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Vì $\lim n^2=+\infty$ và $\lim\left(-1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)=-1<0$ nên $\lim\left(5n-n^2+1\right)=-\infty$ (theo quy tắc 2).

Câu 3: $\lim u_n$, với $u_n=\dfrac{5n^2+3n-7}{n^2}$ bằng:

A. 0. **B.** 5. **C.** 3. **D.** -7.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\lim u_n=\lim\left(\dfrac{5n^2}{n^2}+\dfrac{3n}{n^2}-\dfrac{7}{n^2}\right)=\lim\left(5+\dfrac{3}{n}-\dfrac{7}{n^2}\right)=5$.

Câu 4: $\lim u_n$, với $u_n=\dfrac{2n^3-3n^2+n+5}{n^3-n^2+7}$ bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Chia cả tử và mẫu của phân thức cho n^3 (n^3 là lũy thừa bậc cao nhất của n trong phân thức), ta được: $u_n=\dfrac{2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{5}{n^3}}{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{7}{n^3}}$. Vì $\lim\left(2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{5}{n^3}\right)=2$ và $\lim\left(1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{7}{n^3}\right)=1\neq 0$ nên

$\lim\dfrac{2n^3-3n^2+n+5}{n^3-n^2+7}=\dfrac{2}{1}=2$.

Ví dụ 5: Giới hạn của dãy số (u_n), với $u_n=\dfrac{n^3+2n+1}{n^4+3n^3+5n^2+6}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Chia cả tử và mẫu của phân thức cho n^4 (n^4 là bậc cao nhất của n trong phân thức), ta được

$$\lim u_n=\lim\frac{n^3+2n+1}{n^4+3n^3+5n^2+6}=\lim\frac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{6}{n^3}}=\frac{0}{1}=0.$$

Ví dụ 6: Giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{3n^3+2n-1}{2n^2-n}$, bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Chia cả tử và mẫu cho n^2 (n^2 là lũy thừa bậc cao nhất của n trong **mẫu thức**), ta được

$$u_n=\frac{3n^3+2n-1}{2n^2-n}=\frac{3n+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}}.$$ Vậy $\lim u_n=\lim\left(\frac{3n}{2}\right)=+\infty$.

Ví dụ 7: $\lim\frac{\sin(n!)}{n^2+1}$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\left|\frac{\sin(n!)}{n^2+1}\right|\le\frac{1}{n^2+1}$ mà $\lim\frac{1}{n^2+1}=0$ nên chọn đáp án **A.**

Ví dụ 8: $\lim\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\left|\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\right|=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n.n}=\frac{1}{n^2}$ mà $\lim\frac{1}{n^2}=0$ nên suy ra $\lim\frac{(-1)^n}{n(n+1)}=0$

Ví dụ 9: Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)$

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=0$. **D.** $I=+\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $I=\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2-2n+3}+n\right)}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}$

$$=\lim\frac{\left(n^2-2n+3\right)-n^2}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}=\lim\frac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}=\lim\frac{-2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1}=\frac{-2}{\sqrt{1}+1}=-1.$$

Ví dụ 10: $\lim\left(n-\sqrt[3]{8n^3+3n+2}\right)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** -1. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\lim\left(n-\sqrt[3]{8n^3+3n+2}\right)=\lim n\left(1-\sqrt[3]{8+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}}\right)$.

Vì $\lim n=+\infty,\lim\left(1-\sqrt[3]{8+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}}\right)=1-\sqrt[3]{8}=-1<0$ nên $\lim\left(n-\sqrt[3]{8n^3+3n+2}\right)=-\infty$.

Ví dụ 11: $\lim\left(n^2-n\sqrt{4n+1}\right)$ bằng:

A. -1. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $n^2-n\sqrt{4n+1}=n^2\left(1-\sqrt{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)$.

Vì $\lim n^2=+\infty$ và $\lim\left(1-\sqrt{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=1>0$ nên theo quy tắc 2, $\lim\left(n^2-n\sqrt{4n+1}\right)=+\infty$.

Ví dụ 12. $\lim\left(n-\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}\right)$ bằng :

A. -1. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta tiến hành nhân chia với biểu thức liên hợp (bậc ba) của $n-\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}$

$$\lim\left(n-\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}\right)=\lim\frac{n^3-\left(n^3+3n^2+1\right)}{\left(n^2+n\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}+\sqrt[3]{\left(n^3+3n^2+1\right)^2}\right)}$$

$$=\lim\frac{-3-\frac{1}{n^2}}{1+\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}\right)^2}}=-1.$$

Ví dụ 13. $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+3n+2}\right)$ bằng :

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+3n+2}\right)=\lim\left[\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)+\left(n-\sqrt[3]{n^3+3n+2}\right)\right]=\frac{1}{2}$$

Ví dụ 14. $\lim\left(5^n-2^n\right)$ bằng :

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $5^n-2^n=5^n\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$

Vì $\lim 5^n=+\infty$ và $\lim\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)=1>0$ nên theo quy tắc 2, $\lim\left(5^n-2^n\right)=+\infty$

Ví dụ 15. $\lim\left(3.2^{n+1}-5.3^n+7n\right)$ bằng :

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** -5.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\lim\left(3.2^{n+1}-5.3^n+7n\right)=3^n\left(-5+6\left(\frac{2}{3}\right)^n+7\frac{n}{3^n}\right)=-\infty$$

Ví dụ 16. $\lim \dfrac{4.3^n + 7^{n+1}}{2.5^n + 7^n}$ bằng :

A. 1. **B.** 7. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** $\dfrac{7}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\lim \dfrac{4.3^n + 7^{n+1}}{2.5^n + 7^n} = \lim \dfrac{4.\left(\dfrac{3}{7}\right)^n + 7}{2.\left(\dfrac{5}{7}\right)^n + 1} = \dfrac{7}{1} = 7.$$

Ví dụ 17. $\lim \dfrac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n}$ bằng :

A. 0. **B.** $\dfrac{6}{8}$. **C.** 36. **D.** $\dfrac{4}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\lim \dfrac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n} = \lim \dfrac{4.\left(\dfrac{4}{8}\right)^n + 36.\left(\dfrac{6}{8}\right)^n}{\left(\dfrac{5}{8}\right)^n + 1} = 0.$$

Ví dụ 18. $\lim \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 1}$ bằng :

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Chia cả tử và mẫu cho 3^n ta được $\dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 1} = \dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$

Mà $\lim\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 1\right) = -1 < 0$, $\lim\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right) = 0$ và $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n > 0$ với mọi n nên theo quy tắc 3, $\lim \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 1} = -\infty$.

Dạng 2. Tính giới hạn của dãy số cho bởi hệ thức truy hồi.

Ví dụ 19. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{2(2u_n + 1)}{u_n + 3}$ với mọi $n \ge 1$. Biết dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, $\lim u_n$ bằng:

A. -1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Bằng phương pháp quy nạp, dễ dàng chứng minh được $u_n > 0$ với mọi n

Đặt $\lim u_n = L \ge 0$. Ta có $\lim u_{n+1} = \lim \dfrac{2(2u_n + 1)}{u_n + 3}$ hay $L = \dfrac{2(2L+1)}{L+3}$

$\Rightarrow L^2 - L - 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} L = 2 & (n) \\ L = -1 & (l) \end{array}\right.$

Vậy $\lim u_n = 2$.

Ví dụ 20. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 1,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$ với mọi $n \geq 1$. Tìm giới hạn của (u_n).

A. $\lim u_n = 1$. **B.** $\lim u_n = -1$. **C.** $\lim u_n = \sqrt{2}$. **D.** $\lim u_n = -\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Bằng phương pháp quy nạp, dễ dàng chứng minh được $u_n > 0$ với mọi n

Đề bài không cho biết dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn hay không, tuy nhiên các đáp án đề bài cho đều là các giới hạn hữu hạn. Do đó có thể khẳng định được dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim u_n = L \geq 0$

$\lim u_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$

Hay $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{2}{L}\right) \Rightarrow L = \frac{2}{L} \Rightarrow L^2 = 2 \Rightarrow L = \sqrt{2}$

Vậy $\lim u_n = \sqrt{2}$

(loại trường hợp $L = -\sqrt{2}$). Vậy $\lim u_n = \sqrt{2}$.

Ví dụ 21. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = 2u_n + \frac{1}{2}$ với mọi $n \geq 1$. Khi nó $\lim u_n$ bằng:

A. 0. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Đáp án C.

Giả sử dãy có giới hạn hữu hạn là L.

Ta có: $\lim u_{n+1} = 2\lim u_n + \frac{1}{2} \Leftrightarrow L = 2L + \frac{1}{2} \Leftrightarrow L = -\frac{1}{2}$.

Đến đây có thể kết luận là $\lim u_n = -\frac{1}{2}$ được không? Câu trả lời là không?

Vì không khó để chứng minh được rằng $u_n > 0$ với mọi n. Do đó nếu dãy số có giới hạn L thì $L \geq 0$. Từ đó suy ra dãy không có giới hạn, mà trong bốn đáp án trên chỉ có đáp án C là vô cực.

Vậy ta chọn đáp án C.

Ta xét hai cách giải sau:

Đặt $v_n = u_n + \frac{1}{2}$. Ta có: $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 2u_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2\left(u_n + \frac{1}{2}\right) = 2v_n$

Vậy (v_n) là cấp số nhân có $v_1 = \frac{3}{2}$ và $q = 2$. Vậy $v_n = \frac{3}{2}.2^{n-1} = 3.2^{n-2}$.

Do đó $\lim v_n = \lim\left(3.2^{n-2}\right) = +\infty$. Suy ra $\lim u_n = +\infty$.

Ví dụ 22. Cho dãy số (u_n) xác định $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 2$ với mọi $n \geq 2$. Tìm giới hạn của dãy số (u_n).

A. 0. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Đáp án D.

Giả sử dãy có giới hạn hữu hạn là L.

Ta có: $\lim u_{n+1} = 2\lim u_n - \lim u_{n-1} + 2 \Leftrightarrow L = 2L - L + 2 \Leftrightarrow 0 = 2$ (Vô lý)

Vậy có thể dự đoán dãy có giới hạn vô cực. Tuy nhiên có hai đáp án vô cực ($-\infty$ và $+\infty$), vậy chưa thể đoán là đáp án nào. Ta xem hai cách giải sau.

Ta có $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 4$, $u_4 = 9$. Vậy ta có thể dự đoán $u_n = (n-1)^2$ với mọi $n \geq 1$. Khi đó $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 2 = 2(n-1)^2 - (n-2)^2 + 2 = n^2 = \left[(n-1)-1\right]^2$.

Vậy $u_n = (n-1)^2$ với mọi $n \geq 1$. Do đó $\lim u_n = \lim(n-1)^2 = +\infty$.

Dạng 3. **Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.**

Ví dụ 23. Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a = 2,151515...$ (chu kỳ 15), a được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản, trong đó m, n là các số nguyên dương. Tìm tổng $m+n$.

A. $m+n=104$. **B.** $m+n=312$. **C.** $m+n=38$. **D.** $m+n=114$.

Đáp án A.

Ta có $a = 2,151515... = 2 + \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + ...$

Vì $\frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + ...$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = \frac{15}{100}$, công bội $q = \frac{1}{100}$ nên $a = 2 + \frac{\frac{15}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{71}{33}$.

Vậy $m = 71, n = 33$ nên $m+n = 104$.

Ví dụ 24. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,32111...$ được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên dương. Tính $a-b$.

A. $a-b=611$. **B.** $a-b=-611$. **C.** $a-b=27901$. **D.** $a-b=-27901$.

Đáp án B.

Lời giải

Ta có:

$$0,32111... = \frac{32}{100} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} + ... = \frac{32}{100} + \frac{\frac{1}{10^3}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{289}{900}.$$

Vậy $a=289, b=900$. Do đó $a-b=289-900=-611$.

Dạng 4. **Tìm giới hạn của dãy số mà tổng là n số hạng đầu tiên của một dãy số khác.**

Ví dụ 25. Tổng $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...$ bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Đáp án B.

Lời giải

S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1=1$ và $q=\frac{1}{2}$.

Do đó $S=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$.

Ví dụ 26. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$. Khi đó $\lim u_n$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Đáp án A.

Lời giải

u_n là tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có $u_1=\frac{1}{2}$ và $q=-\frac{1}{2}$.

Do đó $u_n=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$. Suy ra $\lim u_n=\lim\dfrac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=\dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 27. Tính $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Đáp án C.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

Vậy $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]=\lim\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 28. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1+2+...+n}{n^2+1}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\lim u_n = 0$. **B.** $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$. **C.** $\lim u_n = 1$. **D.** Dãy số (u_n) không có giới hạn khi $n \to +\infty$.

Đáp án B.

Lời giải

Ta có: $1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Suy ra $\dfrac{1+2+...+n}{n^2+1} = \dfrac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$.

Do đó $\lim u_n = \lim \dfrac{n(n+1)}{2(n^2+1)} = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 1: $\lim \dfrac{1+5+9+...+4n-3}{2+7+12+...+5n-3}$ bằng:

A. $\dfrac{4}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tử thức là tổng của *n* số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) với $n=1$, $u_n = 4n-3$ và công bội $d=4$.

Do đó $1+5+9+...+4n-3 = \dfrac{n(1+4n-3)}{2} = \dfrac{n(4n-2)}{2}$.

Tương tự ta có: $2+7+12+...+5\text{n}-3 = \dfrac{n(2+5n-3)}{2} = \dfrac{n(5n-1)}{2}$.

Vậy $\lim \dfrac{1+5+9+...+4n-3}{2+7+12+...+5n-3} = \lim \dfrac{n(4n-2)}{n(5n-1)} = \dfrac{4}{5}$.

Ví dụ 2: $\lim \dfrac{3+3^2+3^3+...+3^n}{1+2+2^2+...+2^n}$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có tử thức là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và $q=3$.

Do đó $3+3^2+3^3+...+3^n = 3.\dfrac{3^n-1}{3-1} = \dfrac{3}{2}(3^n-1)$.

Mẫu thức là tổng của *n+1* số hạng đầu tiên của cấp số nhân (v_n) với $v_n = 1$ và $q=2$. Do đó $1+2+2^2+...+2^n = 2.\dfrac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2.(2^{n+1}-1)$.

Vậy $\lim \dfrac{3+3^2+3^3+...+3^n}{1+2+2^2+...+2^n} = \lim \dfrac{3}{4}.\dfrac{3^n-1}{2^{n+1}-1} = \dfrac{3}{4}\lim \dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{2-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n} = +\infty.$

Ví dụ 3: $\lim\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+...+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$ bằng

A. **0.** **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\dfrac{1+2+...+n}{n^2+n} \le \dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+...+\dfrac{n}{n^2+n} \le \dfrac{1+2+...+n}{n^2+1}$.

Mà $\lim \dfrac{1+2+...+n}{n^2+n} = \lim \dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+n} = \dfrac{1}{2}$; $\lim \dfrac{1+2+...+n}{n^2+1} = \lim \dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+1} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\lim\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+...+\dfrac{n}{n^2+n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

DẠNG 1: BÀI TẬP LÝ THUYẾT

Câu 1: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim u_n = 0$ nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

B. $\lim u_n = 0$ nếu $|u_n|$ có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. $\lim u_n = 0$ nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. $\lim u_n = 0$ nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 2: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim u_n = +\infty$ nếu u_n có thể bé hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

B. $\lim u_n = +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. $\lim u_n = +\infty$ nếu $|u_n|$ có thể bé hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. $\lim u_n = +\infty$ nếu $|u_n|$ có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 3: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim u_n = a$ nếu $u_n - a$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

B. $\lim u_n = a$ nếu $u_n - a$ có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. $\lim u_n = a$ nếu $|u_n - a|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. $\lim u_n = a$ nếu $|u_n - a|$ có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 4: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim q^n = 0$ nếu $q > 1$. **B.** $\lim q^n = 0$ nếu $q < 1$.

C. $\lim q^n = 0$ nếu $|q| > 1$. **D.** $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$.

Câu 5: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$. **C.** $\lim q^n = +\infty$ nếu $q < 1$.

B. $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| > 1$. **D.** $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| < 1$

Câu 6: Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào sai?

A. Nếu $|q| \le 1$ thì $\lim q^n = 0$.

B. Nếu $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$ thì $\lim(u_n v_n) = ab$.

C. Với k là số nguyên dương thì $\lim \frac{1}{n^k} = 0$.

D. Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim(u_n v_n) = +\infty$.

Câu 7: Biết $\lim u_n = 3$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 3$. **C.** $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 2$. **B.** $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = -1$. **D.** $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 1$.

Câu 8: Biết $\lim u_n = +\infty$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\lim \frac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = \frac{1}{3}$. **C.** $\lim \frac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = 0$. **B.** $\lim \frac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = \frac{1}{5}$. **D.** $\lim \frac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = +\infty$.

Câu 9: Cho dãy số u_n với $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{2n-1 \quad 2n+1}$. Ta có $\lim u_n$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 10: $\lim \frac{3^n - 4.2^{n+1} - 3}{3.2^n + 4^n}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$

Câu 11: $\lim \frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2}$ bằng

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 12: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng -1?

A. $\lim \frac{2n^2 - 3}{-2n^3 - 4}$. B. $\lim \frac{2n^2 - 3}{-2n^2 - 1}$. C. $\lim \frac{2n^2 - 3}{-2n^3 - 2n^2}$. D. $\lim \frac{2n^3 - 3}{-2n^2 - 1}$.

Câu 13: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim u_n = -\infty$. **B.** Nếu $\lim u_n = -a$ thì $\lim |u_n| = a$.

C. Nếu $\lim u_n = 0$ thì $\lim |u_n| = 0$. **D.** Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim u_n = +\infty$.

Câu 14: Cho dãy số u_n với $u_n = n+1 \sqrt{\frac{2n+2}{n^4 + n^2 - 1}}$. Chọn kết quả đúng của $\lim u_n$

A. $+\infty$. B. 1. C. $-\infty$. D. 0.

Câu 15: Nếu $\lim u_n = L$ thì $\lim \frac{1}{\sqrt[3]{u_n + 8}}$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{L+2}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{L+8}}$ **C.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{L+8}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{L}+\sqrt{8}}$

Câu 16: $\lim \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ là:

A. 1. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 0 .

Câu 17: $L=\lim\left(5n-n^3\right)$ là:

A. -4. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** -6 .

Câu 18: Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng $\dfrac{1}{5}$?

A. $u_n=\dfrac{1-2n^2}{5n+5}$. **B.** $u_n=\dfrac{n^2-2n}{5n+5n^2}$. **C.** $u_n=\dfrac{1-2n}{5n+5n^2}$. **D.** $u_n=\dfrac{1-2n}{5n+5}$.

Câu 19: $\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 20: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n=(-1)^n\dfrac{n+1}{n^2+n-1}$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. $\lim u_n=0$.

B. $\lim u_n=0$ không tồn tại.

C. $\lim u_n=-2$.

D. $\lim u_n=1$.

Câu 21: $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)$ có kết quả là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 22: $\lim\left(3^4.2^{n+1}-5.3^n\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** -1. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 23: $\lim n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-2}\right)$ bằng:

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 1.

Câu 24: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}$. Để (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là:

A. -4. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 25: $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\right)$ bằng:

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2 .

Câu 26: Dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt[3]{n^3+1}-n$ có giới hạn bằng:

A. -1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 27: Nếu $L = \lim\left[n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)\right]$ thì L bằng

A. 3. **B.** $+\infty$. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** $\sqrt{7}-1$.

DẠNG 2: BÀI TẬP TÍNH GIỚI HẠN DÃY SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC

Câu 28: Trong các dãy số sau đây, dãy số nào có giới hạn?

A. $(\sin n)$. **B.** $(\cos n)$. **C.** $((-1)^n)$. **D.** $(\frac{1}{2})$.

Câu 29: Trong các dãy số sau đây, dãy số nào có giới hạn khác 0?

A. $((0,98)^n)$. **C.** $((-0,99)^n)$. **B.** $((0,99)^n)$. **D.** $((1,02)^n)$.

Câu 30: Biết dãy số (u_n) thỏa mãn $|u_n - 1| < \frac{1}{n^3}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n = 1$. **B.** $\lim u_n = 0$.

C. $\lim u_n = -1$. **D.** Không đủ cơ sở để kết luận về giới hạn của dãy số (u_n).

Câu 31: Giới hạn nào dưới đây bằng $+\infty$?

A. $\lim(3n^2 - n^3)$. **C.** $\lim(3n^2 - n)$. **B.** $\lim(n^2 - 4n^3)$. **D.** $\lim(3n^3 - n^4)$.

Câu 32: $\lim\frac{(2n-1)^2(n-1)}{(n^2+1)(2n+1)}$ bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 33: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim\frac{n^2+3n^3+2}{n^2+n}$. **C.** $\lim\frac{2n^2-3n}{n^3+3n}$. **B.** $\lim\frac{n^3+2n-1}{n-2n^3}$. **D.** $\lim\frac{n^2-n+1}{1-2n}$.

Câu 34: Trong các giới hạn hữu hạn sau, giới hạn nào có giá trị khác với các giới hạn còn lại

A. $\lim(1+\frac{n^2\sin 3n}{n^3+1})$. **C.** $\lim\frac{n^2+\sin^2 3n}{n^2+5}$. **B.** $\lim\frac{2^n-\cos 5n}{5^n}$. **D.** $\lim\frac{3^n+\cos n}{3^{n+1}}$.

Câu 35: Để tính $\lim(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+n})$, bạn Nam đã tiến hành các bước như sau:

Bước 1: $\lim(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}) = \lim(\mathrm{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}-n\sqrt{1-\frac{1}{n}})$.

Bước 2: $\lim(\mathrm{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}-n\sqrt{1-\frac{1}{n}}) = \lim n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}})$.

Bước 3: Ta có $\lim n = +\infty$; $\lim(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}) = 0$.

Bước 4: Vậy $\lim(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+n}) = 0$.

Hỏi bạn Nam đã làm **sai** từ bước nào?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Câu 36: $\lim(\sqrt{3n-1}-\sqrt{2n-1})$ bằng?

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 37: $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$ bằng?

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 38: $\lim(1-2n)\sqrt{\dfrac{n+3}{n^3+n+1}}$ bằng?

A. 0. **B.** -2. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 39: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là hữu hạn?

A. $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})n$.

B. $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$.

C. $\lim(\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n+1})$.

D. $\lim(\sqrt{n^2+n+1}-n)$.

Câu 40: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là **không** hữu hạn?

A. $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}}$.

B. $\lim(\sqrt[3]{1+n^3}-n)$.

C. $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-n}$.

D. $\lim(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n)$.

Câu 41: Biết $\lim \dfrac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}-n}=\dfrac{6-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{m}{n}$, trong đó $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $m.n=10$. **C.** $m.n=15$. **B.** $m.n=14$. **D.** $m.n=21$.

Câu 42: Tìm $\lim \dfrac{1-2.3^n+6^n}{2^n(3^{n+1}-5)}$:

A. $+\infty$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

DẠNG 2: TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Câu 43: Cấp số nhân lùi vô hạn $1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{8},...,(-\dfrac{1}{2})^{n-1},...$ có tổng là một phân số tối giản $\dfrac{m}{n}$. Tính $m+2n$.

A. $m+2n=8$. **C.** $m+2n=7$. **B.** $m+2n=4$. **D.** $m+2n=5$.

Câu 44: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,27323232...$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\dfrac{m}{n}$ (m,n là các số nguyên dương). Hỏi m gần với số nào nhất trong các số dưới đây?

A. 542. **B.** 543. **C.** 544. **D.** 545.

Câu 45: Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là 2, tổng của 3 số hạn đầu tiên của nó là $\dfrac{9}{4}$. Số hạn đầu của cấp số nhân đó là?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

Câu 46: Phương trình $2x+1+x^2-x^3+x^4-x^5+...=\dfrac{5}{4}$, trong đó $|x|<1$, có tập nghiệm là:

A. $S=\left\{\frac{-7\pm\sqrt{97}}{24}\right\}$. **C.** $S=\left\{\frac{-3\pm\sqrt{41}}{16}\right\}$. **B.** $S=\left\{\frac{-7+\sqrt{97}}{24}\right\}$. **D.** $S=\left\{\frac{-3+\sqrt{41}}{16}\right\}$.

Câu 47: Cho tam giác đều $A_1B_1C_1$ cạnh a. Người ta dựng tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_1B_1C_1$; dựng tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_2B_2C_2$ và cứ tiếp tục như vậy. Tính tổng diện tích S của tất cả các tam giác đều $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,…

A. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a^2\sqrt{3}$. **D.** $2a^2\sqrt{3}$.

DẠNG 4: TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ CHO BỞI HỆ THỨC TRUY HỒI

Câu 48: Cho số thực a và dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1=a$ và $u_{n+1}=1+\frac{u_n}{2}$ với mọi $n\ge 1$. Tìm giới hạn của dãy số (u_n).

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 49: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=3, 2u_{n+1}=u_n+1$ với mọi $n\ge 1$. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của dãy số (u_n). Tìm $\lim S_n$.

A. $\lim S_n=+\infty$. **C.** $\lim S_n=1$. **B.** $\lim S_n=-\infty$. **D.** $\lim S_n=-1$.

Câu 50: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=1, u_2=2, u_{n+2}=\frac{u_{n+1}+u_n}{2}$ với mọi $n\ge 1$. Tìm $\lim u_n$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 51: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=\frac{1}{4}, u_{n+1}=u_n^2+\frac{u_n}{2}$ với mọi $n\ge 1$. Tìm $\lim u_n$.

A. $\lim u_n=\frac{1}{4}$. **C.** $\lim u_n=\frac{1}{2}$. **B.** $\lim u_n=0$. **D.** $\lim u_n=+\infty$.

Câu 52: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=1, u_{n+1}=u_n+2n+1$ với mọi $n\ge 1$. Khi đó $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}$ bằng.

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

DẠNG 5: TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ CÓ CHỨA THAM SỐ

Câu 53: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=a, u_2=b, u_{n+2}=\frac{u_{n+1}+u_n}{2}$ với mọi $n\ge 1$, trong đó a và b là các số thực cho trước, $a\le b$. Tìm giới hạn của (u_n).

A. $\lim u_n=a$. **C.** $\lim u_n=\frac{a+2b}{3}$. **B.** $\lim u_n=b$. **D.** $\lim u_n=\frac{2a+b}{3}$.

Câu 54: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{3n-m}{5n+2}$, trong đó m là tham số. Để dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn thì:

A. m là số thực bất kỳ.
B. m nhận giá trị duy nhất bằng 3.
C. m nhận giá trị duy nhất bằng 5.
D. Không tồn tại số m.

Câu 55: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}$, trong đó a là tham số. Để (u_n) có giới hạn bằng 2 thì giá trị của tham số a là?

A. -4. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 56: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực a để dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{2n^2+n} - a\sqrt{2n^2-n}$ có giới hạn hữu hạn.

A. $a \in \mathbb{R}$. **C.** $a \in (1;+\infty)$. **B.** $a \in (-\infty;1)$. **D.** $a = 1$.

Câu 57: Tìm hệ thức liên hệ giữa các số thực dương a và b để: $\lim(\sqrt{n^2+an+5} - \sqrt{n^2+bn+3}) = 2$.

A. $a+b=2$. **B.** $a-b=2$. **C.** $a+b=4$. **D.** $a-b=4$.

Câu 58: Tìm số thực a để $\lim \dfrac{\sqrt{an^2+1} - \sqrt{4n-2}}{5n+2} = 2$.

A. $a=10$. **B.** $a=100$. **C.** $a=14$. **D.** $a=144$.

Câu 59: Tìm số thực a để $\lim(2n+a-\sqrt[3]{8n^3+5}) = 6$.

A. $a=2$. **B.** $a=4$. **C.** $a=6$. **D.** $a=8$.

Câu 60: Tìm các số thực a và b sao cho $\lim(\sqrt[3]{1-n^3} - an - b) = 0$.

A. $\begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$.

DẠNG 6: TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ MÀ SỐ HẠNG TỔNG QUÁT LÀ TỔNG CỦA N SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA MỘT DÃY SỐ KHÁC

Câu 61: $\lim \dfrac{1+2+3+...+n}{2+4+6+...+2n}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 62: $\lim \dfrac{1+2+2^2+...+2^n}{1+5+5^2+...+5^n}$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 63: Tìm $\lim\left[(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})...(1-\dfrac{1}{n^2})\right]$ ta được:

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 64: $\lim \dfrac{n!}{(1+1^2).(1+2^2)...(1+n^2)}$ bằng:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 65: Cho dãy số (u_n). Biết $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \dfrac{3n^2+9n}{2}$ với mọi $n \ge 1$. Tìm $\dfrac{1}{nu_n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 66: $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1+3+3^2+...+3^k}{5^{k+2}}$ bằng:

A. 0. **B.** $\frac{17}{100}$. **C.** $\frac{17}{200}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

I. Định nghĩa giới hạn của hàm số tại một điểm

1. Giới hạn hữu hạn tại một điểm

Định nghĩa 1:

Cho $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\backslash\{x_0\}$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_n \in (a;b)\backslash\{x_0\}, x_n \to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L.$

Nhận xét:

- Giới hạn của hàm số được định nghĩa thông qua khái niệm giới hạn của dãy số.

- Hàm số không nhất thiết phải xác định tại x_0.

Định nghĩa 2 (Giới hạn một bên):

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_0<x_n<b, x_n \to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L.$

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $a<x_n<x_0, x_n \to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L.$

Định lí 1

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L.$

2. Giới hạn vô cực tại một điểm

Định nghĩa 3

Cho $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\backslash\{x_0\}$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_n \in (a;b)\backslash\{x_0\}, x_n \to x_0$ ta có $f(x_n)=+\infty.$

Lưu ý:

Các định nghĩa $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

3. Lưu ý:

a) $f(x)$ không nhất thiết phải xác định tại điểm x_0.

b) Ta chỉ xét giới hạn của $f\left(x\right)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $\left(a;b\right)$ (dù nhỏ) chứa x_0 mà $f\left(x\right)$ xác định trên $\left(a;b\right)$ hoặc trên $\left(a;b\right)\backslash\left\{x_0\right\}$.

Chẳng hạn, hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x}$ có tập xác định là $D=\left[0;+\infty\right)$. Do đó ta không xét giới hạn của hàm số tại điểm $x_0=0$, do không có một khoảng $\left(a;b\right)$ nào chứa điểm 0 mà $f\left(x\right)$ xác định trên đó cả. Tương tự vậy ta cũng không xét giới hạn của $f\left(x\right)$ tại mọi điểm $x_0<0$.

c) Ta chỉ xét giới hạn bên phải của $f\left(x\right)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $\left(x_0;b\right)$ (khoảng nằm bên phải x_0) mà $f\left(x\right)$ xác định trên đó.

Tương tự, ta chỉ xét giới hạn bên trái của $f\left(x\right)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $\left(a;x_0\right)$ (khoảng nằm bên trái x_0) mà $f\left(x\right)$ xác định trên đó.

Chẳng hạn, với hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x-1}$, tại điểm $x_0=1$, ta chỉ xét giới hạn bên phải. Với hàm số $g\left(x\right)=\sqrt{1-x}$, tại điểm $x_0=1$, ta chỉ xét giới hạn bên trái.

d) $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x^-_o} f(x)=\lim\limits_{x\to x^+_o} f(x)=+\infty$

$$\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x^-_o} f(x)=\lim\limits_{x\to x^+_o} f(x)=-\infty$$

II. Định nghĩa giới hạn của hàm số tại vô cực

1. Giới hạn hữu hạn tại vô cực

Định nghĩa 4

> Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $\left(a;+\infty\right)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\left(x_n\right)$, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ ta đều có $\lim f(x)=L$.

LƯU Ý: Định nghĩa $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

2. Giới hạn vô cực tại vô cực

Định nghĩa 5

> Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $\left(a;+\infty\right)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\left(x_n\right)$, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ ta đều có $\lim f(x)=+\infty$.

LƯU Ý: Các định nghĩa: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

III. Một số giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{x\to x_o} x=x_o$.

b) $\lim\limits_{x\to x_o} c=c; \lim\limits_{x\to\pm\infty} c=c$ (c là hằng số)

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{c}{x^k}=0$ (c là hằng số, k nguyên dương).

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số nguyên lẻ; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số nguyên chẵn.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-f(x)\right] = -\infty$.

IV. Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 2

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = M$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x\to x_o}\left[f(x)\pm g(x)\right] = L \pm M$.

b) $\lim\limits_{x\to x_o}\left[f(x)g(x)\right] = LM$; $\lim\limits_{x\to x_o}\left[cf(x)\right] = cL$ với c là một là một hằng số.

c) $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M} (M \neq 0)$.

Định lí 3

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = L$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x\to x_o}\left|f(x)\right| = \left|L\right|$.

b) $\lim\limits_{x\to x_o}\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$.

c) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $J\setminus\{x_o\}$, trong đó J là khoảng nào đó chứa x_o, thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_o}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

LƯU Ý: Định lí 2, định lí 3 vẫn đúng khi thay $x \to x_o$ bởi $x \to x^-{}_o, x \to x^+{}_o$.

V. Quy tắc về giới hạn vô cực

Các định lí và quy tắc dưới đây được áp dụng cho mọi trường hợp: $x \to x_o, x \to x^-{}_o, x \to x^+{}_o, x \to +\infty$ và $x \to -\infty$.

Tuyên nhiên, để cho gọn, ta chỉ phát biểu cho trường hợp $x \to x_o$.

Quy tắc 1 (Quy tắc tìm giới hạn của tích).

$L = \lim\limits_{x\to x_o} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_o} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_o}\left[f(x)g(x)\right]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

STUDY TIP: Giới hạn của tích hai hàm số

- Tích của một hàm số có giới hạn hữu hạn khác 0 với một hàm số có giới hạn vô cực là một hàm số có giới hạn vô cực.

- Dấu của giới hạn theo quy tắc dấu của phép nhân hai số.

Quy tắc 2 (Quy tắc tìm giới hạn của thương)

$L=\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_o} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L>0$	0	+	$+\infty$
		-	$-\infty$
$L<0$	0	+	$-\infty$
		-	$+\infty$

(Dấu của $g\left(x\right)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x\neq x_o$).

VI. Các dạng vô định: Gồm $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0.\infty$ **và** $\infty-\infty$**.**

B. Các dạng toán về giới hạn hàm số

Dạng 1: **Tìm giới hạn xác định bằng cách sử dụng trực tiếp các định nghĩa, định lí và quy tắc**

Phương pháp:

- chọn hai dãy số khác nhau $\left(a_n\right)$ và $\left(b_n\right)$ thỏa mãn a_n và b_n thuộc tập xác định của hàm số $y=f(x)$ và khác x_0; $a_n\to x_0; b_n\to x_0$.
- Chứng minh $\lim f\left(a_n\right)\neq \lim f\left(b_n\right)$ hoặc chứng minh một trong hai giới hạn này không tồn tại.
- Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ không tồn tại. TH $x\to x_0^{\pm}$ hoặc $x\to\pm\infty$ chứng minh tương tự.

Ví dụ 1: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=1$ **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=-1$ **C.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=0$ **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ không tồn tại.

Đáp án D

Lời giải

Xét dãy số (x_n) với $x_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$.

Ta có $x_n\to+\infty$ và $\lim\sin x_n=\lim\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1$. $\left(1\right)$

Lại xét dãy số (y_n) với $y_n=-\frac{\pi}{2}+2n\pi$.

Ta có $y_n\to+\infty$ và $\lim\sin y_n=\lim\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=-1$. $\left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ không tồn tại. Vậy chọn đáp án D.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Đáp án C.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $(0;+\infty)$.

Giải sử (x_n) là một dãy số bất kỳ, thỏa mãn $x_n>0, x_n\neq 3$ và $x_n\to 3$ khi $n\to+\infty$. Ta có

$\lim f(x_n)=\lim\dfrac{x_n^2+1}{2\sqrt{x_n}}=\dfrac{3^2+1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ (áp dụng quy tắc về giới hạn hữu hạn của dãy số). Do đó

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 3: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây ?

A. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{x-2}=1$. **B.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{x-2}=5$.

C. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{x-2}=-1$. **D.** Hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ không có giới hạn khi $x\to 3$.

Đáp án B

Lời giải

Hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ xác định trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$. Ta có $3\in(2;+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)=\dfrac{3+2}{3-2}=5$.

Ví dụ 4: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+5x\right)$ bằng:

A. -2. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Đáp án C.

Lời giải

Ta có $-2x^3+5x=x^3\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)=-2<0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)=+\infty$.

Vậy theo Quy tắc 1, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+5x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)=+\infty$. Do đó chọn C.

Ví dụ 5: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4-2x^2+1\right)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 3. **D.** 2.

Đáp án A

Lời giải

Cách 1: Theo nhận xét trên thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4-2x^2+1\right)=+\infty$ ($x\to-\infty$, k chẵn và $a_k>0$). Thật vậy, ta có $3x^4-2x^2+1=x^4\left(3-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}\right)$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x^4=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}\right)=3>0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4-2x^2+1\right)=+\infty$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-2x+5}$. Khẳng định nào dưới đây đúng ?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-\infty$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=+\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=1$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)$ không tồn tại.

Đáp án B.

Lời giải

Hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-2x+5}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Có thể giải nhanh như sau : Vì x^2-2x+5 là một hàm đa thức của x nên có giới hạn tại vô cực. Mà $\sqrt{x^2-2x+5}>0$ với mọi x nên giới hạn của $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-2x+5}$ tại $-\infty$ chắc chắn là $+\infty$.

Thật vậy, ta có $\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=1>0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x+5}=+\infty$.

Ví dụ 7: Giới hạn của hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}$ khi $x\to-\infty$ bằng:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** 3.

Đáp án A.

Lời giải

Ta có:

$$\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}-\sqrt{x^2\left(4+\dfrac{1}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}-|x|\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=|x|\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}\right)$$

Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)=1-2=-1<0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)\right]=-\infty$.

Ví dụ 8: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2017}{3x^3-5x^5}$ bằng:

A. $\frac{2017}{3}$. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Đáp án D.

Lời giải

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^3-5x^5\right)=-\infty$ nên theo quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2017}{3x^3-5x^5}=0$.

Ví dụ 9: Giới hạn bên phải của hàm số $f(x)=\frac{3x-7}{x-2}$ khi $x\to2$ là

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 3. **D.** $\frac{7}{2}$.

Đáp án B.

Lời giải

Hàm số $f(x)=\frac{3x-7}{x-2}$ xác định trên $(-\infty;+\infty)\setminus\{2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)=0$, $x-2>0$ với mọi $x>2$ và $\lim\limits_{x\to2^+}(3x-7)=3.2-7=-1<0$. Do đó theo quy tắc 2 thì $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3x-7}{x-2}=-\infty$.

Ví dụ 10: Xét bài toán "Tìm $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2}$ ", bạn Hà đã giải như sau:

Bước 1: Vì $\lim\limits_{x\to2^-}\left(2x^2-5x+2\right)=0$.

Bước 2: $2x^2-5x+2>0$ với $x<2$ và x đủ gần 2,

Bước 3: $\lim\limits_{x\to2^-}\left(3x^2+x-1\right)=13>0$

Bước 4: nên theo quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2}=+\infty$.

Hỏi lời giải trên của bạn Hà đã sai từ bước thứ mấy ?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Đáp án B

Lời giải

Xét dấu biểu thức $g(x)=2x^2-5x+2$ ta thấy $g(x)<0$ với mọi $x\in(1;2)$.

Vậy lời giải sai từ bước 2. (Lời giải đúng cho ra kết quả $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2}=-\infty$).

Ví dụ 11: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-x}{(x-4)^2}$ bằng:

A. 0. **B.** -3. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Đáp án C.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 4}(1-x)=-3<0$, $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)^2=0$ và $(x-4)^2>0$ với mọi $x\neq 4$ nên theo quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-x}{(x-4)^2}=-\infty$. Vậy chọn đáp án C.

Ví dụ 12: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}5x+2 \text{ khi } x\geq 1\\ x^2-3 \text{ khi } x<1\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=7$. **B.** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-2$.

C. $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=7$. **D.** $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=7$.

Đáp án D.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(5x+2)=5.1+2=7$. Vì chỉ có một đáp án đúng nên chọn đáp án D.

Ví dụ 13: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-5} \text{ khi } x\geq 3 & (1)\\ \dfrac{x^2-5}{x+2} \text{ khi } x<3 & (2)\end{cases}$.

Trong biểu thức (2) ở trên, cần thay số 5 bằng số nào để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x\to 3$?

A. 19. **B.** 1.

C. -1. **D.** Không có số nào thỏa mãn.

Đáp án C.

Lời giải

Hàm số đã cho các định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{x^2-5}=\sqrt{3^2-5}=2$.

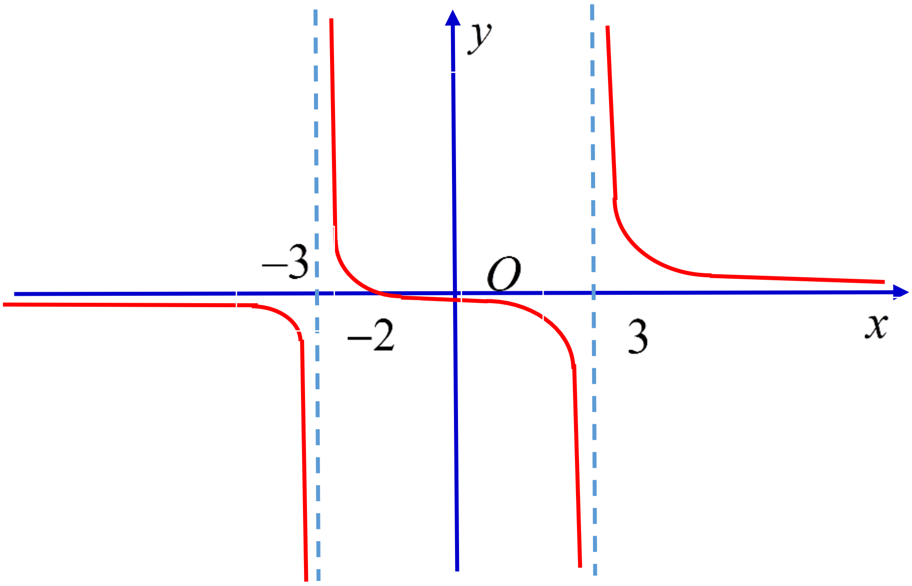
Đặt $f(x)=\dfrac{x^2-m}{x+2}$ khi $x<3$ (m là tham số, $m>0$).

Ta có $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to3^-} = \dfrac{x^2-m}{x+2} = \dfrac{3^2-m}{3+2} = \dfrac{9-m}{5}$.

Để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x\to3$ thì $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^-} f(x) \Leftrightarrow \dfrac{9-m}{5} = 2 \Leftrightarrow m = -1$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\sqrt{X^2-5}$ khi $X=3$ được kết quả bằng 2. Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\dfrac{X^2-A}{X+2}$ khi $X=3$ và lần lượt nhận các giá trị bằng 19,1 và -1. Ta thấy khi $A=-1$ thì biểu thức nhận giá trị bằng 2. Vậy chọn đáp án C.

Ví dụ 14: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Quan sát đồ thị và cho biết trong các giới hạn sau, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. **C.** $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)$. **D.** $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$.

Đáp án C.

Lời giải

Khi $x\to-3^+$, đồ thị hàm số là một đường cong đi lên từ phải qua trái. Do đó $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x) = +\infty$.

Tương tự như vậy ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -\infty$.

Do đó chọn đáp án C.

DẠNG 2: TÌM GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG $\dfrac{0}{0}$

1. Bài toán:

Tính $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức hoặc căn thức.

Phương pháp giải (tự luận)

✓ Phân tích tử và mậu thành tích các nhân tử và giản ước. Cụ thể, vì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ nên $f(x)$ và $g(x)$ cùng có nghiệm $x=x_0$. Do đó ta phân tích được $f(x)=(x-x_0)A(x)$ và $g(x)=(x-x_0)B(x)$. Khi đó ta có: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0)A(x)}{(x-x_0)B(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{A(x)}{B(x)}$ và công việc còn lại là đi tính $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{A(x)}{B(x)}$.

✓ Nếu $f(x)$ và $g(x)$ có chứa căn thức thì có thể nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp trước khi phân tích chúng thành tích để giản ước.

Ví dụ 1. Tính $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

A. 1. **B.** 4. **C.** -2. **D.** -4.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{2+2}{2-1}=4$.

Ví dụ 2. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-x^n}{x-1}$ $(m,\ n\in\mathbb{N}^*)$, ta được kết quả:

A. $+\infty$. **B.** $m-n$. **C.** m. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-x^n}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^m-1}{x-1}-\dfrac{x^n-1}{x-1}\right)$.

Lại có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1\right)=m$.

Tương tự: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}=n$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-x^n}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^m-1}{x-1}-\dfrac{x^n-1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x-1}-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}=m-n$.

Ví dụ 3. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}=0$.

B. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}=+\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}=-\infty$.

D. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}$ không tồn tại.

Phân tích: Vì $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x+3}-2\right)=0$ và $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-3x+2\right)=0$ nên đây là dạng vô định $\frac{0}{0}$. Tuy nhiên ta chưa thể phân tích ngay $\sqrt{x+3}-2$ thành nhân tử mà phải nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp của $\sqrt{x+3}-2$ là $\sqrt{x+3}+2$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}=\dfrac{\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(x^3-3x+2\right)}$

$$=\frac{x-1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)^2(x+2)}=\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+2)}.$$

Mà $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+2)}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+2)}=+\infty$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+2)}$ không tồn tại.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}$ không tồn tại. Vậy chọn đáp án D.

Ví dụ 4. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$ bằng:

A. 1. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}=\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}+\dfrac{1-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$

$$=\frac{2x-2}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)(x-1)}+\frac{3-3x}{\left(1+\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{\left(3x-2^2\right)}\right)(x-1)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}-\frac{3}{1+\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{\left(3x-2^2\right)}}.$$

Tac có: $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}-\dfrac{3}{1+\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{\left(3x-2^2\right)}}\right]=0$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}=0$.

Ví dụ 5. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}$.

A. 0. **B.** -2. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Đặt $t=x-1$ thì $x=t+1,\ \lim\limits_{x\to 1}t=0$ và

$$\frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}=\frac{\sqrt[3]{6t+1}-\sqrt{4t+1}}{t^2}=\frac{\sqrt[3]{6t+1}-(2t+1)}{t^2}+\frac{(2t+1)-\sqrt{4t+1}}{t^2}$$

$$=\frac{6t+1-\left(8t^3+12t^2+6t+1\right)}{t^2\left[\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1).\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2\right]}+\frac{\left(4t^2+4t+1\right)-(4t+1)}{t^2\left(2t+1+\sqrt{4t+1}\right)}$$

$$=\frac{-8t-12}{\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1).\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2}+\frac{4}{2t+1+\sqrt{4t+1}}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}=\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{-8t-12}{\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1).\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2}+\dfrac{4}{2t+1+\sqrt{4t+1}}\right)$.

Mà $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-8t-12}{\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1).\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2}=-\dfrac{12}{3}=-4$; $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{4}{2t+1+\sqrt{4t+1}}=\dfrac{4}{2}=2$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}=-4+2=-2$.

Ví dụ 6. Giới hạn của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-(a+2)x+a+1}{x^3-1}$ khi $x\to 1$ bằng

A. $-\dfrac{a}{3}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{-a-2}{3}$. **D.** $\dfrac{2-a}{3}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-(a+2)x+a+1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-a-1)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-a-1}{x^2+x+1}=-\frac{a}{3}$$

Ví dụ 7. Giả sử $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{2x}=L$. Hệ số a bằng bao nhiêu để $L=3$?

A. -6. **B.** 6. **C.** -12. **D.** 12.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{2x\left(\sqrt{1+ax}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{2\left(\sqrt{1+ax}+1\right)}=\dfrac{a}{4}$

Vậy $L=\dfrac{a}{4}$. Do đó $L=3\Leftrightarrow \dfrac{a}{4}=3\Leftrightarrow a=12$. Đáp án đúng là D.

2. Các bài toán liên quan đến giới hạn đặc biệt

Trong sách giáo khoa đại số và giải tích 11 có nêu một giới hạn đặc biệt dạng $\dfrac{0}{0}$

Đó là $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Sau đây ta xét một số ví dụ áp dụng kết quả này.

Ví dụ 8: Cho a và b là các số thực khác 0. Khi đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{\sin bx}$ bằng

A. a. **B.** b. **C.** $\dfrac{a}{b}$. **D.** $\dfrac{b}{a}$.

Lời giải

Đáp án C.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin bx}.\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{b}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin bx}$

Đổi biến $t=bx$ ta thấy khi $x\to 0$ thì $t\to 0$. Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}$.

Ví dụ 9: Cho số thực a khác 0. Khi đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos ax}$ bằng

A. $\dfrac{2}{a^2}$. **B.** $\dfrac{2}{a}$. **C.** $2a^2$. **D.** $2a$.

Lời giải

Đáp án A

Ta có:

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos ax}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{ax}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\left(\frac{ax}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{ax}{2}}.\frac{2}{a^2}\right]=\frac{2}{a^2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{ax}{2}}{\sin\frac{ax}{2}}\right)^2=\frac{2}{a^2}.1^2=\frac{2}{a^2}.$$

Ví dụ 10: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$ bằng

A. $\tan a$. **B.** $\cot a$. **C.** $\sin a$. **D.** $\cos a$.

Lời giải

Đáp án D

Ta có $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{2.\frac{x-a}{2}}=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}.\cos\dfrac{x+a}{2}\right)$

Mà $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}=1$ (xem STUDY TIP trên), $\lim\limits_{x\to a}\cos\dfrac{x+a}{2}=\cos a$.

Vậy $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\cos a$. Do đó chọn đáp án D.

Ví dụ 11: Biết $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\dfrac{a}{b}$ trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản, a và b là các số nguyên dương.

Tổng $a+b$ bằng

A. 137. **B.** 138. **C.** 139. **D.** 140.

Lời giải

Đáp án C.

Với những bài dạng này, sẽ khó sử dụng MTCT để tìm đáp án đúng.

Đặt $t=x-8$. Suy ra $x=t+8$. $\lim\limits_{x\to 8}t=0$ và

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\frac{\sqrt{t+9}-\sqrt[3]{t+27}}{\sqrt[4]{t+16}-2}=\frac{3\sqrt{1+\dfrac{t}{9}}-3\sqrt[3]{1+\dfrac{t}{27}}}{2\sqrt[4]{1+\dfrac{t}{16}}-2}$$

$$=\frac{3}{2}\frac{\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{t}{9}}-1}{t}-\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{t}{27}}-1}{t}}{\dfrac{\sqrt[4]{1+\dfrac{t}{16}}-1}{t}}=g(t)$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\lim\limits_{t\to 0}g(t)$. Áp dụng ví dụ 13 Ta có:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+\dfrac{t}{9}}-1}{t}=\frac{\dfrac{1}{9}}{2}=\frac{1}{18};\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\dfrac{t}{27}}-1}{t}=\frac{\dfrac{1}{27}}{3}=\frac{1}{81};\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+\dfrac{t}{16}}-1}{t}=\frac{\dfrac{1}{16}}{4}=\frac{1}{64}$$

Vậy $\lim\limits_{t\to 0}g(t)=\dfrac{3}{2}.\dfrac{\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{81}}{\dfrac{1}{64}}=\dfrac{112}{27}$

Do đó $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\dfrac{112}{27}$. Vậy $a=112, b=27$ và $a+b=139$

******* Tính giới hạn vô định dạng $\dfrac{0}{0}$ bằng đạo hàm (Quy tắc L'Hôpital).

Ví dụ 12: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-3x+1}{5-2x}$ bằng:

A. 0 **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $+\infty$ **D.** $-\infty$

Đáp án D

Theo kết quả đã nêu ở trên thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-3x+1}{5-2x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=-\infty$

Ví dụ 3 : Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5+x^3+7}{2x^3-3x^2+1}$ **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-3x^2-x^3}{4x^2+1}$ **C.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-3x^4+5}{x-x^3+1}$ **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-x^6}{1+x-5x^2}$

Đáp án C

Lời giải

Cách 1 : Theo cách ghi kết quả ở trên thì

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5+x^3+7}{2x^3-3x^2+1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1-3x^2-x^3}{4x^2+1}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x^4+5}{x-x^3+1}=3\lim_{x\to-\infty}x=-\infty;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x^6}{1+x-5x^5}=\frac{1}{5}\lim_{x\to-\infty}x^4=+\infty;$$

Cách 2 : sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn

Khi đến C thấy $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-3x^4+5}{x-x^3+1}=3\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ nên dừng lại và chọn đáp án C

Ví dụ 4 : Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}$ bằng :

A. 2 **B.** -2 **C.** 1 **D.** -1

Đáp án B

Lời giải :

Cách 1 :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=-2$$

Vậy chọn đáp án B

Cách 2 : Sử dụng MTCT

Ví dụ 5 : Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$ bằng :

A. $-\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $-\infty$ **D.** $+\infty$

Đáp án B

Lời giải :

Cách 1 : Theo ví dụ đã trình bày ở dạng 1 thì $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1})=-\infty$

Ta đưa x^2 ra ngoài căn rồi chia cả tử và mẫu cho x. Cụ thể như sau :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}-|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2x+3}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2x+3}==\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{1}{2}$$

Vậy đáp án đúng là B

Cách 2 : Sử dụng máy tính tính giá trị hàm số tại $x=10^{-10}$ ta được kết quả như hình bên. Vậy chọn đáp án B

Cách 3 : Ta có thể giải bài này bằng phương pháp loại trừ như sau :

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1})=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}(2x+3)=-\infty$ nên giới hạn cần tìm phải mang dấu dương. Mặt khác bậc tử và bậc mẫu bằng nhau nên giới hạn cần tìm là hữu hạn.

Đáp án cần tìm là đáp án B

Ví dụ 6 : Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}=\frac{\sqrt{a}}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Giá trị nhỏ nhất của tích ab bằng :

A. 6 **B.** 12 **C.** 18 **D.** 24

Đáp án C

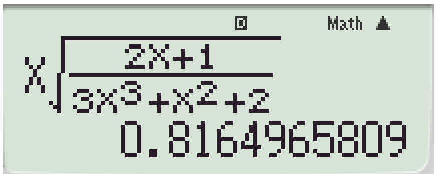
Lời giải :

Ta có : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x^3+x^2}{3x^3+x^2+2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

Vậy $\frac{\sqrt{a}}{b}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ Dễ dàng suy ra được tích của ab là 18.

Chú ý : Nếu sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=10^{10}$ thì ta thu được kết quả như hình bên. Do đó, nếu không có kiến thưc về giới hạn hàm số, rất khó tìm ra được đáp án đúng nếu chỉ dùng MTCT. Ngược lại nếu có kiến thức vững vàng, bạn đọc sẽ nhanh chóng tìm ra đáp án, thậm chí là trong chớp mắt ! Vì vậy, tôi xin nhắc lại, tôi khuyến nghị các bạn đọc nên giải bài tập theo kiểu tự luận một cách căn cơ để có thể đối mặt với các bài toán ‘’chống MTCT’’

STUDY TIP



Dạng 4 : Dạng vô định $0.\infty$

Bài toán : Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)v(x)]$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)]=0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}[v(x)]=\pm\infty$

Phương pháp : Ta có thể biến đổi $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)v(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$ để đưa về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc

$\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)v(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$ để đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Tuy nhiên, trong nhiều bài tập, ta chỉ cần biến đổi đơn giản như đưa biểu thức vào trong/ ra ngoài dâu căn, quy đồng mẫu thức …. Là đưa được về dạng quen thuộc.

Ví dụ 1 : Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}(\frac{1}{x+1}-1)$ bằng :

A. 0 **B.** -1 **C.** 1 **D.** $-\infty$

Đáp án B

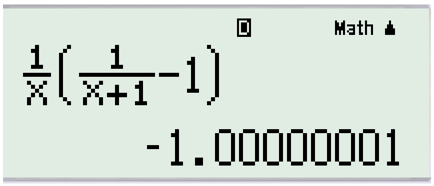
Phân tích : Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty; \lim\limits_{x\to 0^-}(\frac{1}{x+1}-1)=0$ nên chưa có thể áp dụng các định lí, qui tắc để tính giới hạn.

Lời giải :

Cách 1 : Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}(\frac{1}{x+1}-1)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-(x+1)}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-1}{x+1}=-1$

Cách 2 : Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $-0,00000001$ ta được kết quả như hình bên. Do đó chọn đáp án B, tức $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}(\frac{1}{x+1}-1)=-1$

STUDY TIP



Ví dụ 2 : Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$ bằng :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Đáp án C

Phân tích : Vì $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0; \lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}=+\infty$ nên chưa có thể áp dụng các định lý và qui tắc để tính giới hạn.

Lời giải :

Cách 1 : Với mọi $x>2$ ta có : $(x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}=\sqrt{\frac{(x-2)^2x}{x^2-4}}=\sqrt{\frac{(x-2)x}{x+2}}$

Do đó $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{\frac{(x-2)x}{x+2}}=0$. Vậy chọn đáp án C

Cách 2: Sử dụng MTCT

Ví dụ 3: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+1)\sqrt{\frac{2x+1}{5x^3+x+2}}$ bằng:

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ **C.** $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ **D.** $-\sqrt{2}$

Đáp án B

Phân tích: Ví dụ tương tự đã được nghiên cứu trong phần dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

Tuy nhiên vì $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+1)=-\infty; \lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{\frac{2x+1}{5x^3+x+2}}=0$ nên giới hạn này cũng có thể coi như dạng $0.\infty$

Lời giải

Cách 1: Với $x<-1$ ta có $x+1<0$ nên $x+1=-\sqrt{(x+1)^2}$. Do đó

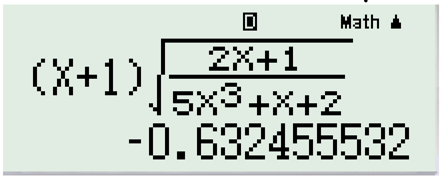
$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)\sqrt{\frac{2x+1}{5x^3+x+2}}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{(x+1)^2(2x+1)}{5x^3+x+2}}=-\frac{\sqrt{10}}{5}$$

Vậy chọn đáp án B

Cách 2: Sử dụng MTCT. Tính giá trị hàm số tại $x=10^{-10}$ ta được kết quả như hình bên. So sánh các đáp số A, B, C, D ta chọn đáp án đúng là **B.**

STUDY TIP

Ta chỉ quan tâm đến lũy thừa bậc cao nhất là x^3. Hệ số của x^2 trong $(x+1)^2$ là 1^2 do $(x+1)^2=x^2+2x+1$. Hệ số của x trong 2x + 1 là 2 nên hệ số của x^3 trên tử là $1^2.2$. Ở đây không nhất thiết phải khai triển tích thành đa thức để tìm hệ số của x^3.



Ví dụ 4: Giới hạn $\lim_{x\to+\infty}(x\sin\frac{1}{x})$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** $+\infty$ **D.** Không tồn tại

Đáp án B

Phân tích: Vì $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ nên $\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}=0$. Ta có dạng $0.\infty$. Lời giải như sau :

Lời giải :

Cách 1 : Ta có : $\lim_{x\to+\infty}(x\sin\frac{1}{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

Đặt $t=\frac{1}{x}$ và $\lim_{x\to+\infty}t=0$ thì $\lim_{x\to+\infty}(x\sin\frac{1}{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin t}{t}=1$

Cách 2: Sử dụng MTCT (Lưu ý chuyển máy về chế độ Radian)

STUDY TIP

Ở ví dụ 4 ta đã chuyển dạng $0.\infty$ thành $\frac{0}{0}$ do ta liên tưởng đến giới hạn đặc biệt $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

Ví dụ 5: Giới hạn $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\frac{\pi}{2}-x)\tan x$ bằng

A. 1 **B.** 0 **C.** $-\infty$ **D.** Không tồn tại

Đáp án A

Phân tích: vì $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\frac{\pi}{2}-x)=0;\ \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\tan x=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{\sin x}{\cos x}=+\infty$ nên ta có dạng $0.\infty$

Lời giải :

Cách 1 : Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x$ thì $x=\frac{\pi}{2}-t,\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} t=0$ và

$$(\frac{\pi}{2}-x)\tan x=t\tan(\frac{\pi}{2}-t)=\text{t}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{\cos(\frac{\pi}{2}-t)}=\frac{t}{\sin t}\cos t$$. Do đó

$$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\frac{\pi}{2}-x)\,\text{t anx}=\lim\limits_{t\to o^+}\frac{t}{\sin t}cost=1$$

Cách 2 : Sử dụng MTCT

STUDY TIP

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} tanx=+\infty;\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} tanx=+\infty$. Lưu ý để tránh nhầm lẫn giữa hai giới hạn này

Dạng 5 : Dạng $\infty-\infty$

Bài toán : Tính $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)-v(x)]$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\text{v}(x)=+\infty$ Hoặc tính $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)+v(x)]$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\text{v}(x)=-\infty$

Phương pháp : Nhân hoặc chia với biểu thức liên hợp (nếu có căn thức) hoặc qui đồng để đưa về cùng một phân thức (nếu chứa nhiều phân thức).

Ví dụ 1 : Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)$ bằng

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $+\infty$ **D.** $-\infty$

Đáp án A

Lời giải :

Cách 1:

Phân tích: Ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ nên bài này thuộc dạng $\infty-\infty$. Tương tự như giới hạn dãy số, ta nhân chia với biểu thưc liên hợp. Lời giải cụ thể như sau:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}$

Cách 2: Sử dụng MTCT

Ví dụ 2: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+1}+3x\right)$ bằng

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $-\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $-\frac{1}{6}$

Đáp án D

Lời giải:

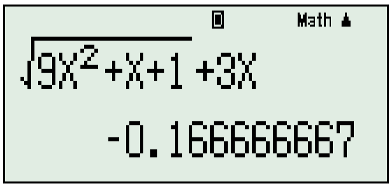
Phân tích: Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2+x+1}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}(3x)=-\infty$ nên bài này thuộc dạng vô định $\infty-\infty$ (mặc dù biểu thức của hàm số lấy giới hạn có hạng tổng). Ta tiến hành nhân chia với biểu thức liên hợp. Lời giải cụ thể như sau:

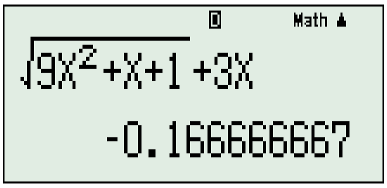
Ta có: $\lim\left(\sqrt{9x^2+x+1}+3x\right)=\lim\dfrac{x+1}{\sqrt{9x^2+x+1}-3x}=\lim\dfrac{x+1}{-x\sqrt{9+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3x}$

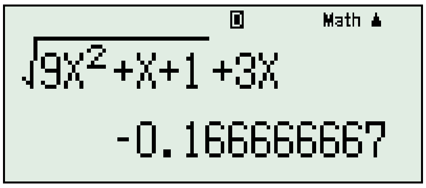
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{9+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3}=\frac{1}{-3-3}=\frac{-1}{6}.$$ Vậy chọn đáp án **D.**

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=-10^{10}$ ta được kết quả như hình bên. Sử dụng kĩ thuật tìm dạng phân số của một số thập phân vô hạn tuần hoàn ta được $-0,1(6)=\dfrac{-1}{6}$ (xem lại phần giới hạn dãy số). Vậy chọn đáp án **D.**

□ ***Studytip:***







Ví dụ 3. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}\right)$ bằng:

A. $\dfrac{13}{24}$ **B.** $\dfrac{7}{12}$ **C.** $-\dfrac{13}{24}$ **D.** $-\dfrac{7}{12}$

Lời giải

Cách 1: Phân tích:

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+3x}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}=+\infty$ nên đấy cũng là dạng vô định $\infty-\infty$. Tuy nhiên vì là hiệu của hai căn thức không cùng bậc nên ta chưa thể nhâ chia với biểu thức liên hợp luôn được. Nhận thấy $x>0$ thì $\sqrt{4x^2}=\sqrt[3]{8x^3}=2x$ nên ta thêm bớt $2x$ rồi nhân chia liên hợp.

Với $x>0$: $\sqrt{4x^2+3x}-\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}=\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)+\left(2x-\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}\right)$

$$=\frac{3x}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}-\frac{2+\dfrac{1}{x^2}}{4+2\sqrt[3]{8+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}}+\sqrt[3]{\left(8+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)^2}}$$

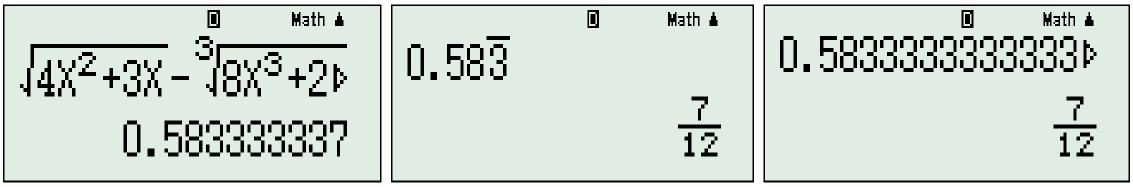
Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{x}}+2}-\frac{2+\frac{1}{x^2}}{4+2\sqrt[3]{8+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}+\sqrt[3]{\left(8+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2}}\right)=\frac{3}{2+2}-\frac{2}{4+4+4}=\frac{7}{12}.$$

Do đó chọn **B.**

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=-10^{10}$ ta được kết quả như hình bên. Sử dụng ki thuật tìm dạng phân số của một số thập phân vô hạn tuần hoàn ta được $-0,58(3)=\frac{7}{12}$. (xem lại phần giới hạn dãy số). Vậy chọn đáp án **D.**

☐ ***Studytip:***



Lưu ý: Ta xem lại một Ví dụ đã trình bày ở dạng 1 như sau:

Ví dụ 4. Giới hạn của hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}$ khi $x\to+\infty$ bằng:

A. $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** -1 **D.** 3

Phân tích: Ví dụ này cũng thuộc dạng $\infty-\infty$ nhưng lại không phải là dạng vô định. Bằng các định lí và quy tắc, ta tính được giới hạn hàm số mà không cần phải nhân chia với biểu thức liên hợp. Ta xem cách giải cho tiết dưới đây.

Lời giải

$$\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}-|x|\sqrt{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=|x|\left(\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}\right).$$

Ta có $\lim_{x\to+\infty}|x|=+\infty$ và $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}=1-2=-1<0.$

Vậy $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[|x|\left(\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}\right)\right]=-\infty.$

☐ ***Studytip:***

Cũng là $\infty-\infty$ nhưng khi nào là xác định, khi nào là vô định? Khi nào phải nhân chia liên hợp, khi nào thì đưa x^n ra ngoài căn rồi đặt nhân tử chung như Ví dụ 4? Để có câu trả lời mời quý độc giả hãy đọc lại phần giới hạn dãy số có chứa căn.

Ví dụ 5. Trong các giới hạn sau giới hạn nào là hữu hạn:

A. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)$. **B.** $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-3x\right)$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{1+x+2x^2}\right)$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3x+2}\right)$.

Lời giải

Cách 1: Với các kết quả đã biết phần giới hạn dãy số có chứa căn, ta thấy ngay đáp án là **D.** Thật vậy:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+4x+3}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)=+\infty.$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2+x+1}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-3x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-3x\right)=+\infty.$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{1+x+2x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+2}\right)=-\infty$

do $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+2}\right)=1-\sqrt{2}<0.$

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+2}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-1}=\frac{-3}{2}.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT để tìm lần lượt các giới hạn.

Ví dụ 6. Giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -3 **D.** -2

Lời giải

Cách 1: Vì $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{x^2-4}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$ nên ta có dạng $\infty-\infty$.

Theo phương pháp đã nêu từ đầu, ta đi quy đồng mẫu số các phân thức.

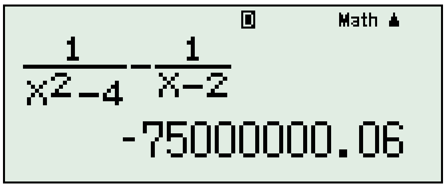
Ta có $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to2^+}\left[\frac{1}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{(x-2)}\right]=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{-x-1}{(x-2)(x+2)}$.

Vì $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{-x-1}{(x+2)}=\frac{-3}{4}<0,\ \lim\limits_{x\to2^+}(x-2)=0$ và $x-2>0$ với mọi $x>2$ nên theo quy tắc 2,

$\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{-x-1}{(x-2)(x+2)}=-\infty.$ Do đó chọn B

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=2{,}00000001$ ta được kết quả như hình bên.

Do đó chọn đáp án B, tức là $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=-\infty.$



Ví dụ 7. Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để giới hạn: $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\frac{a}{x^2-6x+8}-\frac{b}{x^2-5x+6}\right)$ là hữu hạn:

A. $a-4b=0.$ **B.** $a-3b=0.$ **C.** $a-2b=0.$ **D.** $a-b=0.$

Lời giải

Cách 1: Ta có $\frac{a}{x^2-6x+8}-\frac{b}{x^2-5x+6}=\frac{a}{(x-2)(x-4)}-\frac{b}{(x-2)(x-3)}$

$=\frac{a(x-3)-b(x-4)}{(x-2)(x-3)(x-4)}=\frac{g(x)}{(x-2)(x-3)(x-4)}.$

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0; \lim\limits_{x\to 2^-}(x-3)=-1; \lim\limits_{x\to 2^-}(x-4)=-2; \lim\limits_{x\to 2^-}g(x)=2b-a.$

Do đó nếu $\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)\neq 0 \Leftrightarrow 2b-a\neq 0$ thì giới hạn cần tìm là vô cực theo quy tắc 2.

Từ đó chọn được đáp án đúng là C.

(Thật vậy, nếu $\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)=2b-a=0$ thì

$$\frac{a}{x^2-6x+8}-\frac{b}{x^2-5x+6}=\frac{bx-2b}{(x-2)(x-3)(x-4)}=\frac{b}{(x-3)(x-4)}$$

Và do đó $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\frac{a}{x^2-6x+8}-\frac{b}{x^2-5x+6}\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{b}{(x-3)(x-4)}=\frac{b}{2}.$

Cách 2: Sử dụng MTCT. Với mỗi đáp án, lấy các giá trị cụ thể của a và b, thay vào hàm số rồi tính giới hạn.

Từ đó chọn được đáp án là **C.**

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

DẠNG 1. BÀI TẬP TÍNH GIỚI HẠN BẰNG CÁCH SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA, ĐỊNH LÍ, QUY TẮC.

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để $B>7$ với $B=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3+3x+m^2-2m\right)$.

A. $m<1$ hoặc $m>3$ **B.** $m<-1$ hoặc $m>3$ **C.** $-1<m<3$ **D.** $1<m<3.$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+1}{1-x} & khi\ x<1\\ \sqrt{2x-2} & khi\ x\geq 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ bằng:

A. 0 **B.** 2 **C.** $-\infty$ **D.** $+\infty$

Câu 3: Trong các hàm số sau, hàm số nào có giới hạn tại điểm $x=1$?

A. $f(x)=\frac{1}{|x-1|}$ **B.** $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ **C.** $h(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ **D.** $t(x)=\frac{1}{x-1}$

Câu 4: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}=0$ **B.** $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}=-1$ **C.** $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}=1$ **D.** $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ không tồn tại.

Câu 5: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x^3-x^2+x+1)$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^4+3x+1)$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x^2-7x^3+2)$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-x^5+2)$.

Câu 6: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-2x\right)$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-x\right)$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+4x+3}\right)$.

Câu 7: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $+\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\frac{6-x^2}{9+3x}$. **B.** $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{\sqrt{1-2x}}{5+5x}$. **C.** $\lim\limits_{x\to-2}\frac{5-3x^3}{(x-2)^4}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^3-4}{(x+1)^2}$

Câu 8: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là vô cực?

A. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{x^2+2x}}$. **B.** $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\frac{x^3+2x^2}{(x^2-x+6)^2}$.

C. $\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{\frac{9x^2-x}{(2x-1)(x^4-3)}}$. **D.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2(2x-1)}{x^4+x+1}$.

Câu 9: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là vô cực?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3}{\sqrt{5x^2+x+2}+4x}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-2)^3+8}{x}$.

C. $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{3-x}}{x^4+x}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{4x^3-x^3+2}$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $f(x)=mx+\sqrt{9x^2-3x+1}$ có giới hạn hữu hạn khi $x\to+\infty$.

A. $m=-3$ **B.** $m\neq-3$ **C.** $m\geq 0$ **D.** $m<0$

DẠNG 2. GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG $\frac{0}{0}$.

Câu 11: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-2}\frac{|3x+6|}{x+2}$

A. Bằng 3 **B.** Bằng -3 **C.** Bằng 0 **D.** không tồn tại

Câu 12: Cho a là một số thực khác 0. Kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^4-a^4}{x-a}$ bằng:

A. $3a^3$ **B.** $2a^3$ **C.** a^3 **D.** $4a^3$

Câu 13: Cho $C=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-mx+m-1}{x^2-1}, m$ là tham số thực. Tìm m để $C=2$.

A. $m=2$ **B.** $m=-2$ **C.** $m=1$ **D.** $m=-1$

Câu 14: Cho a và b là các số thực khác 0. Nếu $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=6$ thì $a+b$ bằng:

A. 2 **B.** -4 **C.** -6 **D.** 8

Câu 15: Cho a và b là các số thực khác 0. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{ax+1}}{\sin bx}$ bằng:

A. $\dfrac{a}{2b}$ **B.** $-\dfrac{a}{2b}$ **C.** $\dfrac{2a}{b}$ **D.** $-\dfrac{2a}{b}$

Câu 16: Cho a,b,c là các số thực khác $0, 3b-2c\neq 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a,b,c để:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}=\frac{1}{2}.$$

A. $\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{10}$ **B.** $\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{6}$ **C.** $\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{12}$

Câu 17: Cho m và n là các số nguyên dương phân biệt. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^m-x^n}$ bằng:

A. $m-n$ **B.** $n-m$ **C.** $\dfrac{1}{m-n}$ **D.** $\dfrac{1}{n-m}$

Câu 18: Để tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}$, bạn Bính đã trình bày bài giải như sau:

Bước 1: Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-1}{x-1}-\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}.$$

Bước 2: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{5x-4}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5}{\sqrt{5x-4}+1}=\dfrac{5}{2}.$

Bước 3: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}=1.$

Bước 4: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}=\dfrac{5}{2}-1=\dfrac{3}{2}.$

Hỏi lời giải của bạn Bính đã mắc lỗi sai ở bước nào?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Câu 19: Biết $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}=\dfrac{m}{n}$ trong đó $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Tổng $2m+n$ bằng:

A. 68 **B.** 69 **C.** 70 **D.** 71

Câu 20: Biết $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)\left(x^2+3x-18\right)}=\dfrac{m}{n}$, trong đó $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Khi đó $3m+n$ bằng:

A. 55 **B.** 56 **C.** 57 **D.** 58

Câu 21: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt[3]{5x-4}}{(x-1)^2}$ bằng:

A. $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Câu 22: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^3-1}$. **B.** $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$. **C.** $\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right|$. **D.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\left(x^2-x-6\right)^2}{x^3+2x^2}$.

Câu 23: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào khác 0?

A. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-x}}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{\left(x^2+1\right)(3-x)}}$.

C. $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x^2+2x+1}}$. **D.** $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Câu 24: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào không tồn tại?

A. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2+11x+18}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+3)^3-27}{x}$. **C.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$. **D.** $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x|x+2|}{x^2+3x+2}$.

Câu 25: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào không hữu hạn?

A. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x^2+x-10}{x^3-8}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+9}$. **C.** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$. **D.** $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9}$.

DẠNG 3: GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Câu 26: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng -1?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{x+1}$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x^2+3}{5x^2-x^3}$. **C.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{x^2-5x}$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{3x+x^2}$.

Câu 27: Trong các giới hạn hữu hạn sau đây, giới hạn nào là lớn nhất?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)\left(3-2x-5x^3\right)}{x\left(x^3-1\right)}$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(2x^2+1\right)\left(2x^2+x\right)}{\left(2x^4+x\right)(x+1)}$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(x^2+1\right)\left(2x^2-x+4\right)}{x^3(3x+1)}$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(3x^2+1\right)\left(2-x^3\right)}{\left(2x^4+x\right)(x+1)}$.

Câu 28: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào là $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^2+x-1}{3+x}$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+x+5}{1+2x}$. **C.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3x^3+x^2}{5+x-2x^2}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-x^4+1}{2-x-x^2}$.

Câu 20. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 21. Cho a,b,c là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a,b,c để $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax-b\sqrt{9x^2+2}}{cx+1}=5$.

A. $\dfrac{a-3b}{c}=5$. **B.** $\dfrac{a-3b}{c}=-5$. **C.** $\dfrac{a+3b}{c}=5$. **D.** $\dfrac{a+3b}{c}=-5$.

Câu 22. Cho a và b là các tham số thực . Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{4x^2+3x+1}{cx+1}-(ax+b)\right]=0, a$ và b thỏa mãn hệ thức nào trong các hệ thức dưới đây ?

A. $a+b=9$. **B.** $a+b=-9$. **C.** $a-b=9$. **D.** $a-b=-9$.

Câu 23. Trong các giới hạn sau , giới hạn nào là $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4-x-1}{x^2+x+2}$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5x+2}{1+2|x|}$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^5+x-11}}{2x^2+x+1}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{1-2x}}$.

Câu 24. Tìm giới hạn nhỏ nhất trong các giới hạn hữu hạn sau.

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\dfrac{2x-x^2}{8x^2-x+3}}$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2-x+2}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2|x|+3}{\sqrt{x^2+x+5}}$.

Câu 25. Trong các giới hạn hữu hạn sau , giới hạn nào là lớn nhất?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{(2x-5)(1-x)^2}{3x^3-x+1}}$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^4+x^2+2}{(x^3+1)(3x-1)}}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-2|x|}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

Câu 26. Trong các giới hạn hữu hạn sau , giới hạn nào là nhỏ nhất?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}+2x}{3-4|x|}$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x)\sqrt{\dfrac{x}{x^3-1}}$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{3x^4+4x^5+2}{9x^5+5x^4+4}}$.

DẠNG 4: Giới hạn vô định dạng $0.\infty$

Câu 27. Cho a là một số thực dương. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}$.

A. bằng $-\dfrac{1}{a^2}$. **B.** là $+\infty$. **C.** là $-\infty$. **D.** không tồn tại.

Câu 28. Trong các giới hạn sau , giới hạn nào là hữu hạn ?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{x^3}{2x^4+x^2+1}}$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{3x}{x^2-1}}$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3+x}}$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)\sqrt{\dfrac{x}{2x^4+x+1}}$.

Câu 29. Trong các giới hạn hữu hạn sau , giới hạn nào là nhỏ nhất?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{2x+1}{x^3+x+2}}$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)\sqrt{\dfrac{3x-11}{x^3+1}}$.

C. $\lim\limits_{x\to1^+}(x^3-1)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-3x)\sqrt{\dfrac{x+1}{5x^3+2x+1}}$.

Câu 30. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}-\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x}}\right)$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$

Câu 31. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan2x\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

A. 2. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$

DẠNG 5: Dạng vô định $\infty-\infty$

Câu 32. Cho n là một số nguyên dương. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{n}{1-x^n}-\dfrac{1}{1-x}\right)$.

A. $\dfrac{n}{2}$. **B.** $\dfrac{n-1}{2}$. **C.** $\dfrac{n+1}{2}$. **D.** $\dfrac{n+2}{2}$

Câu 33. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1} & khi\,x>1\\ mx+2 & khi\,x\le1\end{cases}$. Với giá trị nào của m thì hàm số $f(x)$ có giới hạn tại điểm $x=1$

A. 2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực k sao cho giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{k}{x^2-1}\right)$ là hữu hạn.

A. $k=2$. **B.** $k\neq2$. **C.** $k<2$. **D.** $k>2$.

Câu 35. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào là -1?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$.

Câu 36. Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x+5}+ax)=+\infty$ nếu.

A. $a\ge1$. **B.** $a\le1$. **C.** $a>1$. **D.** $a<1$.

Câu 37. Cho a và b là các số thực khác 0. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax-\sqrt{x^2+bx+2})=3$, thì tổng $a+b$ bằng

A. 2. **B.** -6. **C.** 7. **D.** -5.

Câu 38. Cho a và b là các số thực khác 0. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+b-\sqrt{x^2-6x+2})=5$ số lớn hơn trong hai số a và b là số nào trong các số dưới đây?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 39. Trong các giới hạn dưới đây, giới hạn nào là vô cực?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+3})$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x+1}+2x)$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+3x+1}+5x)$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+5x})$.

Câu 40. Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+2x}+\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5})=-\dfrac{m}{n}$ trong đó $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Tìm bội số chung nhỏ nhất của m và n.

A. 135. **B.** 136. **C.** 138. **D.** 140.

Câu 41. Cho a và b là các số nguyên dương. Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+ax}+\sqrt[3]{27x^3+bx^2+5})=\dfrac{7}{27}$, hỏi a và b thỏa mãn hệ thức nào dưới đây?

A. $a+2b=33$. **B.** $a+2b=34$. **C.** $a+2b=35$. **D.** $a+2b=36$.

HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng (a,b) và $x_0\in(a;b)$. Hàm số $y=f(x)$ được gọi là *liên tục* tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

STUDY TIP

Khi xét tính liên tục của hàm số tại một điểm, đặc biệt lưu ý đến điều kiện hàm số xác định trên một khoảng (dù nhỏ) chứa điểm đó.

Định nghĩa 2

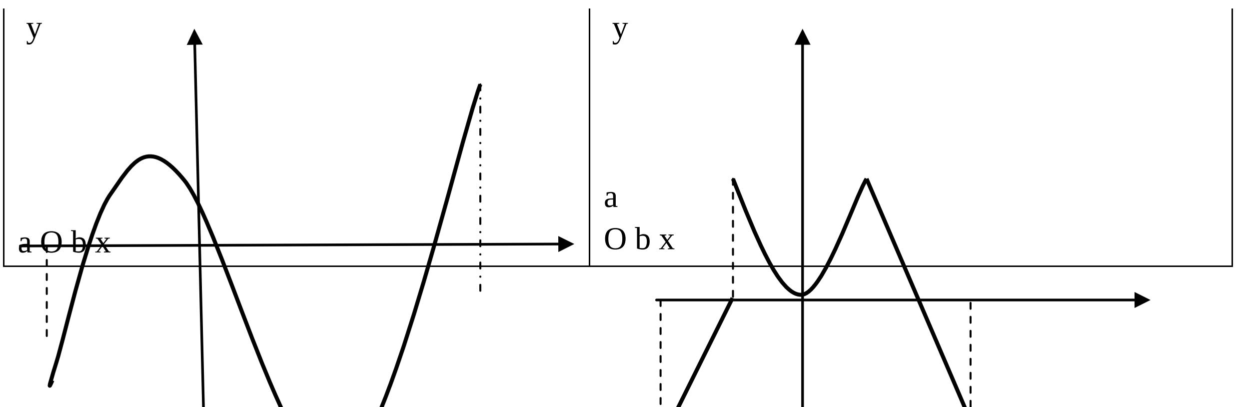
Hàm số $y=f(x)$ được gọi là ***liên tục trên một khoảng*** nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là ***liên tục trên một đoạn*** $[a,b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$; $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$

Khái niệm liên tục của hàm số trên nửa khoảng như $[a;b),(a;b],[a;+\infty),(-\infty;b]$ được định nghĩa một cách tương tự.

STUDY TIP

Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một “đường liền” trên khoảng đó



Đồ thị của hàm số liên tục trên khoảng $(a;b)$.	Đồ thị của hàm số không liên tục trên khoảng $(a;b)$.

Định lý 2

Giả sử $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_o. Khi đó:

a) Các hàm số $y=f(x)+g(x), y=f(x)-g(x), y=f(x).g(x)$ liên tục tại điểm x_o.

b) Hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm x_o nếu $g(x)\neq 0$.

STUDY TIP

Tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục tại một điểm là những hàm số liên tục tại điểm đó (trong trường hợp thương, giá trị của mẫu tại điểm đó phải khác 0).

2. **Một số định lí cơ bản**

Định lí 1

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.
b) Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức), các hàm số lượng giác, hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

(Các hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit sẽ được học trong chương trình lớp 12)

STUDY TIP

Các hàm số sơ cấp liên tục trên từng khoảng xác định của chúng

Định lí 3

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

Nói cách khác:

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a;b)$.

STUDY TIP

Một phương pháp chứng minh phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên khoảng $(a;b)$:

- Chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

- Chứng minh $f(a).f(b)<0$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM SỐ LIÊN TỤC

DẠNG 1. XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

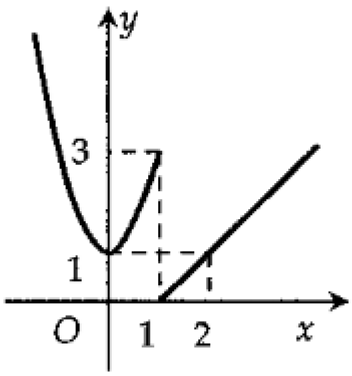
Phương pháp chung:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 ta làm như sau:

- Tính $f(x_0)$;
- Tính $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ thì kết luận hàm số liên tục tại x_0.
- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ không tồn tại hoặc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì kết luận hàm số không liên tục tại x_0.

Khi xét tính liên tục của hàm số trên một tập, ta sử dụng Định lí 1, Định lí 2 đã nêu trong phần Lí thuyết.

Câu 1: Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị dưới đây gián đoạn tại điểm có hoành độ bằng bao nhiêu?



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Đáp án B.

Lời giải

Quan sát đồ thị ta thấy $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3; \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$. Vậy $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ nên $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ không tồn tại. Do đó hàm số gián đoạn tại điểm $x = 1$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 5x + 6}$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; 3)$. **B.** $(2; 3)$. **C.** $(-3; 2)$. **D.** $(-3; +\infty)$.

Đáp án B.

Lời giải

Hàm số có dạng phân thức hữu tỉ xác định trên tập hợp $D = (-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (-2; +\infty)$ nên theo Định lí 1, hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; -3); (-3; -2); (-2; +\infty)$. Vì $(2; 3) \subset (-2; +\infty)$ nên đáp án đúng là **B.**

STUDY TIP

Các hàm số sơ cấp liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

D. $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(1;2)$ và $(2;+\infty)$.

Đáp án D.

Lời giải

$f(x)$ là hàm phân thức hữu tỉ, có tập xác định là $(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$ nên theo Định lí 1, $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(1;2)$ và $(2;+\infty)$.

STUDY TIP

Thật ra rút gọn ta được $f(x)=\dfrac{x-2}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{x-1}$ nhưng không vì thế mà kết luận $f(x)$ trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Chú ý: Không được rút gọn biểu thức của hàm số trước khi tìm tập xác định!

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-5} & \text{khi } x>5\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau?

A. $f(x)$ liên tục tại $x=7$.

B. $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

C. $f(x)$ liên tục trên $[5;+\infty)$.

D. $f(x)$ liên tục trên $(5;+\infty)$.

Đáp án B.

Lời giải

Hàm số $f(x)$ xác định trên $D=[5;+\infty)\cup\{0\}$. Theo định lí 1, $f(x)$ liên tục trên $[5;+\infty)$. Do đó $f(x)$ liên tục trên $(5;+\infty)$ và tại $x=7$. Vậy A, C, D đúng suy ra B sai.

Thật vậy, vì không tồn tại khoảng $(a;b)$ nào chứa điểm $x=0$ mà $f(x)$ xác định trên $(a;b)$ nên không thể xét tính liên tục của $f(x)$ tại $x=0$. Do đó không thể khẳng định $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x+2 \text{ khi } x<-1\\ x^2-1 \text{ khi } x\ge -1\end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;-1]$.

C. $f(x)$ liên tục trên $[-1;+\infty)$.

D. $f(x)$ liên tục tại $x=-1$.

Đáp án C.

Lời giải

Trên $[-1;+\infty)$, $f(x)=x^2-1$ nên theo định lí 1, $f(x)$ liên tục trên $[-1;+\infty)$. Vậy chọn đáp án đúng là C.

Giải thích thêm:

Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(3x+2)=-1$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x^2-1)=0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\ne\lim\limits_{x\to(-1)^+}$ nên $\lim\limits_{x\to(-1)}$ không tồn tại.

Do đó $f(x)$ không liên tục tại $x=-1$ nên A, D sai.

Mặt khác $f(-1)=(-1)^2-1=0$. Vậy $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\neq f(-1)$ nên $f(x)$ không liên tục trên $(-\infty;-1]$.

Do đó B sai.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ mx+1 & \text{khi x=2}\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=2$.

A. $m=\dfrac{17}{2}$. **B.** $m=\dfrac{15}{2}$. **C.** $m=\dfrac{13}{2}$. **D.** $m=\dfrac{11}{2}$.

Đáp án D.

Lời giải

$f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(2)=2m+1$ và $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\left(x^2+2x+4\right)=12$.

(có thể dùng MTCT để tính giới hạn của hàm số)

Để $f(x)$ liên tục tại $x=2$ thì $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow 2m+1=12\Leftrightarrow m=\dfrac{11}{2}$.

Câu 7: Chon hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} & \text{khi } x\neq 3\\ m & \text{khi } x=3\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=3$.

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Đáp án A.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

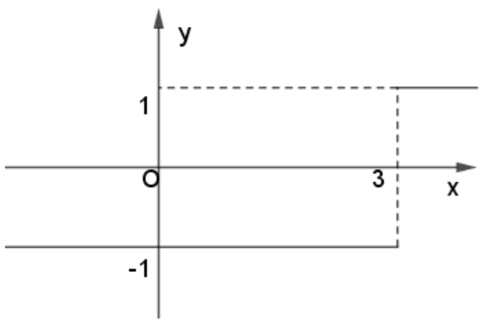
Ta có $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{|x-3|}{x-3}=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{-(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3^-}(-1)=-1$.

Tương tự ta có $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=1$.(có thể dùng MTCT để tính giới hạn của hàm số)

Vậy $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to3^+}f(x)$ nên $\lim\limits_{x\to3}f(x)$ không tồn tại. Vậy với mọi m, hàm số đã cho không liên tục tại $x=3$.

Do đó đáp án đúng là **A.**

Ta có thể tam khảo thêm đồ thị của hàm số khi $x\neq3$ để hiểu rõ hơn.



Câu 8: Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để hàm số

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 4x^2+5b & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$.

A. $a=5b$. **B.** $a=10b$. **C.** $a=b$. **D.** $a=2b$.

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Theo kết quả đã biết thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+1}-1}{x}=\dfrac{a}{2}$. Mặt khác $f(0)=5b$. Để hàm số đã cho liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \dfrac{a}{2}=5b\Leftrightarrow a=10b$. Vậy đáp án đúng là **B.**

Cách 2: Sử dụng MTCT. Chọn các giá trị cụ thể của a và b thỏa mãn từng hệ thức rồi tính toán cho đến khi được kết quả $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Chẳng hạn với hệ thức ở đáp án A, chọn $a=5;b=1$ ta tìm được $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5x+1}-1}{x}=\dfrac{5}{2}$; $f(0)=5$ nên không thỏa mãn. Với hệ thức ở đáp án B, chọn $a=10;b=1$ ta được $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{10x+1}-1}{x}=5$; $f(0)=5$ nên thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

Do đó đáp án là B.

STUDY TIP

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{ax+1}-1}{x}=\dfrac{a}{n}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x\geq 2\\ \dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x<2\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=3$. **B.** $m=4$. **C.** $m=5$. **D.** $m=6$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$.

Ta có $f(2)=3; \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{2x-4}+3\right)=3$.

Nếu $m=6$ thì $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x^2-12x+20}=-\infty$ nên hàm số không liên tục tại $x=2$.

Nếu $m\neq 6$ thì ta có $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2}=\dfrac{3}{6-m}$.

Để hàm số liên tục tại $x=2$ thì $\dfrac{3}{6-m}=3\Leftrightarrow 6-m=1\Leftrightarrow m=5$.

Với $m=5$ thì khi $x<2$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-10x+17}$ liên tục trên $(-\infty;2)$.

Tóm lại với $m=5$ thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Cách 2: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$.

Ta có $f(2)=3; \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{2x-4}+3\right)=3$.

Thử lần lượt các giá trị từ A đến C thấy $m=5$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=3$. Do đó chọn đáp án C.

DẠNG 2. CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

Phương pháp chung:

Một phương pháp chứng minh phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên khoảng $(a;b)$:

- Chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.
- Chứng minh $f(a).f(b)<0$.
- Từ đó kết luận phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm ta cần tìm được hai số a và b sao cho hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a;b]$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

B. Nếu $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

C. Nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ phải liên tục trên khoảng $(a;b)$.

D. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục, tăng trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không thể có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

Đáp án D.

Lời giải

A sai. Chẳng hạn xét hàm số $f(x)=x^2-5$. Hàm số này xác định trên đoạn $[-3;3]$ và liên tục trên đó, đồng thời $f(-3).f(3)=4.4=16>0$ nhưng lại có hai nghiệm $x_1=-\sqrt{5}; x_2=\sqrt{5}$ thuộc vào khoảng $(-3;3)$.

B sai . vì thiếu điều kiện $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

C sai. Chẳng hạn xét hàm số $f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ khi x} < 0 \\ x+2 \text{ khi } x \geq 0 \end{cases}$. Hàm số này xác định trên đoạn $[-3;3]$, có nghiệm $x=-1$ thuộc vào khoảng $(-3;3)$ nhưng gián đoạn tại điểm $x=0\in(-3;3)$, tức là không liên tục trên $(-3;3)$.

Vậy D đúng. Thật vậy:

- Vì hàm số $y=f(x)$ liên tục, tăng trên đoạn $[a;b]$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là $f(a)$, giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là $f(b)$.
- Nếu $f(a)>0$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là một số dương nên không có giá trị nào của x trên khoảng $(a;b)$ làm cho $f(x)=0$. Do

đó phương trình $f(x)=0$ không thể có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

+ Nếu $f(a)<0,$ do $f(a).f(b)>0$ nên suy ra $f(b)<0.$ Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là một số âm nên không có giá trị nào của x trên khoảng $(a;b)$ làm cho $f(x)=0$. Do đó phương trình $f(x)=0$ không thể có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

Câu 10: Cho phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0 \quad (1)$ trong đó a,b,c là các tham số thực. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. Phương trình (1) vô nghiệm với mọi a,b,c.

B. Phương trình (1) có ít nhất một nghiệm với mọi a,b,c.

C. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm với mọi a,b,c.

D. Phương trình (1) có ít nhất ba nghiệm với mọi a,b,c.

Lời giải

Đáp án B.

Dễ thấy $a=b=c=0$ thì phương trình (1) trở thành $x^3=0 \Leftrightarrow x=0.$ Vậy A, C, D sai. Do đó B đúng.

Giải thích thêm: Xét bài toán "Chứng minh rằng phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0 \quad (1)$ luôn có ít nhất một nghiệm với mọi a,b,c". Ta có lời giải cụ thể như sau:

Đặt $f(x)=x^3+ax^2+bx+c.$ Ta có:

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+ax^2+bx+c\right)=-\infty$ với mọi a,b,c nên tồn tại một giá trị $x=x_1$ sao cho $f(x_1)<0$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+ax^2+bx+c\right)=+\infty$ với mọi a,b,c nên tồn tại một giá trị $x=x_2$ sao cho $f(x_2)>0$
.

Vậy $f(x_1).f(x_2)<0$ mà $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên suy ra $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(x_1;x_2)$. Từ đó suy ra ĐPCM.

STUDY TIP

Phương trình đa thức bậc lẻ $a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+...+a_1x+a_0=0$ trong đó $a_{2n+1}\neq 0$ luôn có ít nhất một nghiệm với mọi giá trị của $a_i, i=\overline{2n+1,0}.$

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình: $\left(m^2-3m+2\right)x^3-3x+1=0$ có nghiệm.

A. $m\in\{1;2\}$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m\in\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **D.** $m\in\varnothing$.

Lời giải

Đáp án B.

Nếu $m^2-3m+2=0$: Phương trình đã cho trở thành $-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

Nếu $m^2-3m+2\neq 0$: theo **STUDY TIP** vừa nêu thì phương trình đã cho luôn có nghiệm.
Tóm lại với mọi $m\in\mathbb{R}$ thì phương trình đã cho luôn có nghiệm. Do đó B đúng.

Câu 12: Cho phương trình $x^4-3x^3+x-\frac{1}{8}=0 \quad (1)$. Chọn khẳng định đúng:

A. Phương trình (1) có đúng một nghiệm trên khoảng $(-1;3)$.

B. Phương trình (1) có đúng hai nghiệm trên khoảng $(-1;3)$.

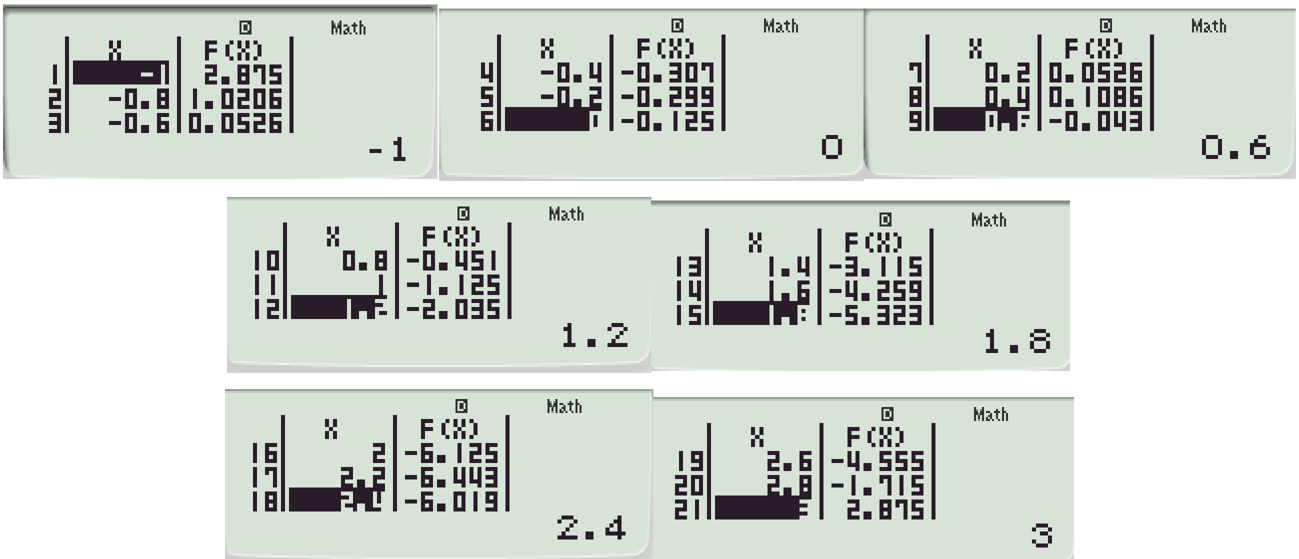
C. Phương trình (1) có đúng ba nghiệm trên khoảng $(-1;3)$.

D. Phương trình (1) có đúng bốn nghiệm trên khoảng $(-1;3)$.

Lời giải

Đáp án D.

Cách 1: Sử dụng chức năng Table trên MTCT: $f(X)=X^4-3X^3+X-\frac{1}{8}$, Start: -1, End: 3, Step: 0.2 ta được kết quả như sau:



Quan sát kết quả ta thấy giá trị của $f(x)$ tại các điểm trong khoảng $(-1;3)$ đổi dấu 4 lần. Mà phương trình bậc 4 thì có tối đa 4 nghiệm thực. Vậy phương trình (1) có đúng bốn nghiệm trên khoảng $(-1;3)$. Do đó D là đáp án đúng.

Cách 2: Sử dụng chức năng Shift Calc (Solve) của MTCT để tìm nghiệm xáp xỉ của phương trình trong khoảng $(-1;3)$. Tuy nhiên cách này tiềm ẩn nhiều may rủi hơn cách sử dụng chức năng Table như trên.

STUDY TIP

Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(x)$ đổi dấu khi x từ a qua b thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

Câu 13: Cho phương trình $2x^4-5x^2+x-+1=0$ (1). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.

B. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.

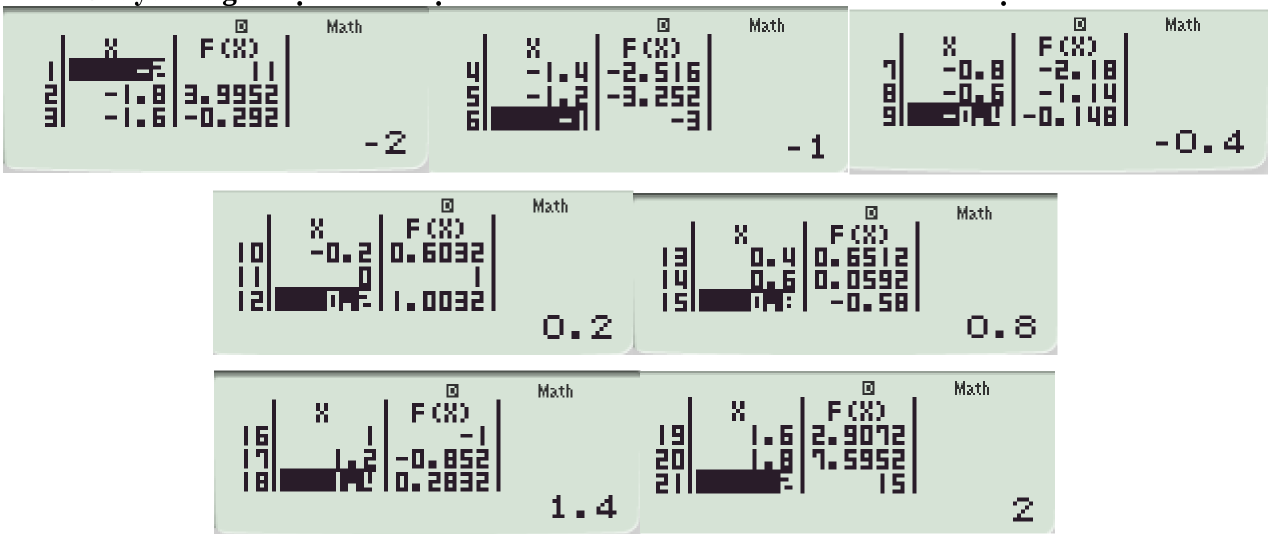
C. Phương trình (1) chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2;1)$.

D. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0;2)$.

Lời giải

Đáp án D.

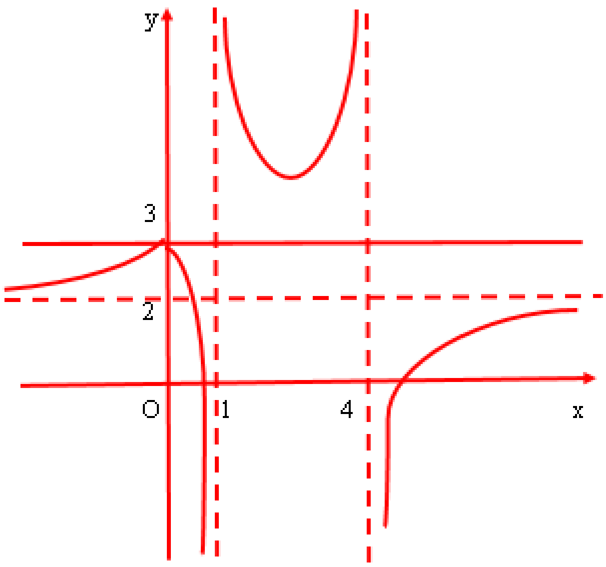
Cách 1: Sử dụng chức năng Table trên MTCT: $f(X)=2X^4-5X^2+X+1$, Start: -2, End: 2, Step: 0.2 ta được kết quả như sau:



Quan sát kết quả ta thấy trên khoảng $(-1;1)$ phương trình có ít nhất hai nghiệm, trên khoảng $(-2;0)$ phương trình có ít nhất hai nghiệm, trên khoảng $(-2;1)$ phương trình có ít nhất ba nghiệm, trên khoảng $(0;2)$ phương trình có ít nhất hai nghiệm. Vậy D là đáp án đúng.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Chọn khẳng định đúng:

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số liên tục trên $(-\infty;4)$.

C. Hàm số liên tục trên $(1;+\infty)$.

D. Hàm số liên tục trên $(1;4)$.

Câu 2. Cho hàm số

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}, & x>1\\ \dfrac{1}{4}, & x=1\\ \dfrac{x^2-1}{x^2-7x+6}, & x<1.\end{cases}$$

Chọn khẳng định đúng:

A. $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=6$ và không liên tục tại $x=1$.

B. $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=6$ và tại $x=1$.

C. $f\left(x\right)$ không liên tục tại $x=6$ và liên tục tại $x=1$.

D. $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=6$ và tại $x=1$.

Câu 3. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^4+4x^2}}{x} & khi\ x\neq 0\\ m-3 & khi\ x=0\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=0$.

A. Không có giá trị nào của m thỏa mãn. **B.** $m=5$.

C. $m=1$. **D.** $m\in\{1;5\}$.

Câu 4. Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để hàm số sau liên tục tại $x=0$.

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax+1}\sqrt[3]{bx+1}-1}{x} & khi\ x\neq 0\\ a+b & khi\ x=0\end{cases}.$$

A. $a+b=0$. **B.** $2a+b=0$. **C.** $3a+4b=0$. **D.** $3a+2b=0$.

Câu 5. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right) & khi\ x<1\\ m^3x+3-3m & khi\ x\geq 1\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m\in\{1;2\}$. **B.** $m\in\{1;-2\}$. **C.** $m\in\{-1;2\}$. **D.** $m\in\{-1;-2\}$.

Câu 6. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+6}-a}{\sqrt{x+1}-2} & khi\ x\neq 3\\ x^3-\left(2b+1\right)x & khi\ x=3\end{cases}$. Trong đó a và b là các tham số thực. Biết hàm số liên tục tại $x=3$. Số nhỏ hơn trong hai số a và b là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 7. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x\sin\dfrac{2}{x} & khi\ x>0\\ a\cos x-5 & khi\ x\leq 0\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a=5$. **B.** $a=7$.

C. $a=\dfrac{11}{2}$. **D.** Không có giá trị nào của a thỏa mãn.

Câu 8. Cho phương trình $4x^4+2x^2-x-3=0 \quad (1)$. Chọn khẳng định đúng:

A. Phương trình (1) vô nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

B. Phương trình (1) có đúng một nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

C. Phương trình (1) có đúng hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

D. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $(m^2-5m+4)x^5+2x^2+1=0$ có nghiệm.

A. $m\in\mathbb{R}\setminus\{1;4\}$.

B. $m\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.

C. $m\in\{1;4\}$.

D. $m\in\mathbb{R}$.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình sau có nghiệm
$(2m^2-5m+2)(x-1)^{2017}(x^{2018}-2)+2x+3=0.$

A. $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2};2\right\}$.

B. $m\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

C. $m\in\left\{\frac{1}{2};2\right\}$.

D. $m\in\mathbb{R}$.