BÀI TẬP HÌNH HỌC 10

CHƯƠNG III

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

Trần Sĩ Tùng

CHƯƠNG III
PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

I. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ đgl **vectơ chỉ phương** của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ.

Nhận xét: *– Nếu $\vec{u}$ là một VTCP của Δ thì $k\vec{u}$ (k ≠ 0) cũng là một VTCP của Δ.*

– Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một VTCP.

2. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng

Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ đgl **vectơ pháp tuyến** của đường thẳng Δ nếu giá của nó vuông góc với Δ.

Nhận xét: *– Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của Δ thì $k\vec{n}$ (k ≠ 0) cũng là một VTPT của Δ.*

– Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một VTPT.

– Nếu $\vec{u}$ là một VTCP và $\vec{n}$ là một VTPT của Δ thì $\vec{u} \perp \vec{n}$.

3. Phương trình tham số của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0;y_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (u_1;u_2)$.

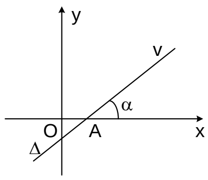
Phương trình tham số của Δ: $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}}$ (1) *(t là tham số).*

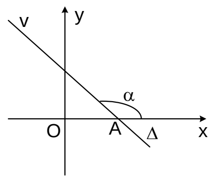
Nhận xét: *– M(x; y) ∈ Δ ⇔ ∃t ∈ R:* $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$.

– Gọi k là hệ số góc của Δ thì:

+ $k = \tan\alpha$, *với* $\alpha = xAv$, $\alpha \neq 90^0$.

+ $k = \dfrac{u_2}{u_1}$, *với* $u_1 \neq 0$.





4. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0;y_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (u_1;u_2)$.

Phương trình chính tắc của Δ: $\boxed{\dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2}}$ (2) ($u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$).

Chú ý: *Trong trường hợp $u_1 = 0$ hoặc $u_2 = 0$ thì đường thẳng không có phương trình chính tắc.*

5. Phương trình tham số của đường thẳng

PT $ax + by + c = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ đgl **phương trình tổng quát** của đường thẳng.

Nhận xét: *– Nếu Δ có phương trình $ax + by + c = 0$ thì Δ có:*

VTPT là $\vec{n} = (a;b)$ và VTCP $\vec{u} = (-b;a)$ hoặc $\vec{u} = (b;-a)$.

– Nếu Δ đi qua $M_0(x_0;y_0)$ và có VTPT $\vec{n} = (a;b)$ thì phương trình của Δ là:

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0}$$

Các trường hợp đặc biệt:

Các hệ số	Phương trình đường thẳng Δ	Tính chất đường thẳng Δ
$c = 0$	$ax + by = 0$	Δ *đi qua gốc toạ độ O*
$a = 0$	$by + c = 0$	$\Delta \parallel Ox$ *hoặc* $\Delta \equiv Ox$
$b = 0$	$ax + c = 0$	$\Delta \parallel Oy$ *hoặc* $\Delta \equiv Oy$

• *Δ đi qua hai điểm A(a; 0), B(0; b) (a, b $\neq$ 0): Phương trình của Δ:* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

(phương trình đường thẳng theo đoạn chắn) .

• *Δ đi qua điểm* $M_0(x_0;y_0)$ *và có hệ số góc k: Phương trình của Δ:* $y - y_0 = k(x - x_0)$

(phương trình đường thẳng theo hệ số góc)

6. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và Δ_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Toạ độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

• Δ_1 cắt Δ_2 $\Leftrightarrow$ hệ (1) có một nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (*nếu* $a_2, b_2, c_2 \neq 0$)

• $\Delta_1 \parallel \Delta_2$ $\Leftrightarrow$ hệ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (*nếu* $a_2, b_2, c_2 \neq 0$)

• $\Delta_1 \equiv \Delta_2$ $\Leftrightarrow$ hệ (1) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (*nếu* $a_2, b_2, c_2 \neq 0$)

7. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ (có VTPT $\vec{n}_1 = (a_1; b_1)$)

và Δ_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ (có VTPT $\vec{n}_2 = (a_2; b_2)$).

$$(\Delta_1, \Delta_2) = \begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{n}_2) & khi\ (\vec{n}_1, \vec{n}_2) \le 90^0 \\ 180^0 - (\vec{n}_1, \vec{n}_2) & khi\ (\vec{n}_1, \vec{n}_2) > 90^0 \end{cases}$$

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Chú ý: • $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

• *Cho* Δ_1: $y = k_1x + m_1$, Δ_2: $y = k_2x + m_2$ *thì:*

+ $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$ + $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 . k_2 = -1$.

8. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

• ***Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng***

Cho đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0)$.

$$\boxed{d(M_0, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

• ***Vị trí tương đối của hai điểm đối với một đường thẳng***

Cho đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$ và hai điểm $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_N) \notin \Delta$.

– *M, N* nằm cùng phía đối với $\Delta \Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$.

– *M, N* nằm khác phía đối với $\Delta \Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$.

• ***Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng***

Cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1x+b_1y+c_1=0$ và Δ_2: $a_2x+b_2y+c_2=0$ cắt nhau.

Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là:

$$\boxed{\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}}$$

VẤN ĐỀ 1: Lập phương trình đường thẳng

• *Để lập phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ ta cần xác định **một điểm** $M_0(x_0;y_0)\in\Delta$ và **một VTCP** $\vec{u}=(u_1;u_2)$ của Δ.*

$$\text{PTTS của }\Delta\text{: }\begin{cases}x=x_0+tu_1\\ y=y_0+tu_2\end{cases};\quad \text{PTCT của }\Delta\text{: }\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}\quad(u_1\neq 0,\ u_2\neq 0).$$

• *Để lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ ta cần xác định **một điểm** $M_0(x_0;y_0)\in\Delta$ và **một VTPT** $\vec{n}=(a;b)$ của Δ.*

$$\text{PTTQ của }\Delta\text{: } a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

• *Một số bài toán thường gặp:*

+ Δ đi qua hai điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ (với $x_A\neq x_B$, $y_A\neq y_B$):

$$\text{PT của }\Delta\text{: }\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$$

+ Δ đi qua hai điểm A(a; 0), B(0; b) (a, b ≠ 0): PT của Δ: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

+ Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0)$ và có hệ số góc k: PT của Δ: $y-y_0=k(x-x_0)$

Chú ý: *Ta có thể chuyển đổi giữa các phương trình tham số, chính tắc, tổng quát của một đường thẳng.*

• *Để tìm điểm M′ đối xứng với điểm M qua đường thẳng d, ta có thể thực hiện như sau:*

Cách 1: – Viết phương trình đường thẳng Δ qua M và vuông góc với d.

– Xác định I = d ∩ Δ (I là hình chiếu của M trên d).

– Xác định M′ sao cho I là trung điểm của MM′.

Cách 2: Gọi I là trung điểm của MM′. Khi đó:

$$M'\text{ đối xứng của }M\text{ qua }d \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{MM'}\perp\vec{u}_d\\ I\in d\end{cases}\ \text{(sử dụng toạ độ)}$$

• *Để viết phương trình đường thẳng d′ đối xứng với đường thẳng d qua đường thẳng Δ, ta có thể thực hiện như sau:*

– Nếu d // Δ:

+ Lấy A ∈ d. Xác định A′ đối xứng với A qua Δ.

+ Viết phương trình đường thẳng d′ qua A′ và song song với d.

– Nếu d ∩ Δ = I:

+ Lấy A ∈ d (A ≠ I). Xác định A′ đối xứng với A qua Δ.

+ Viết phương trình đường thẳng d′ qua A′ và I.

• *Để viết phương trình đường thẳng d′ đối xứng với đường thẳng d qua điểm I, Δ, ta có thể thực hiện như sau:*

– Lấy A ∈ d. Xác định A′ đối xứng với A qua I.

– Viết phương trình đường thẳng d′ qua A′ và song song với d.

Bài 1. Lập PTTS, PTCT (nếu có), PTTQ của các đường thẳng đi qua điểm M và có VTCP $\vec{u}$:

a) M(–2; 3), $\vec{u}=(5;-1)$ b) M(–1; 2), $\vec{u}=(-2;3)$ c) M(3; –1), $\vec{u}=(-2;-5)$
d) M(1; 2), $\vec{u}=(5;0)$ e) M(7; –3), $\vec{u}=(0;3)$ f) M ≡ O(0; 0), $\vec{u}=(2;5)$

Bài 2. Lập PTTS, PTCT (nếu có), PTTQ của các đường thẳng đi qua điểm M và có VTPT $\vec{n}$:
a) M(–2; 3), $\vec{n}=(5;-1)$ b) M(–1; 2), $\vec{n}=(-2;3)$ c) M(3; –1), $\vec{n}=(-2;-5)$
d) M(1; 2), $\vec{n}=(5;0)$ e) M(7; –3), $\vec{n}=(0;3)$ f) M ≡ O(0; 0), $\vec{n}=(2;5)$

Bài 3. Lập PTTS, PTCT (nếu có), PTTQ của các đường thẳng đi qua điểm M và có hệ số góc k:
a) M(–3; 1), $k = -2$ b) M(–3; 4), $k = 3$ c) M(5; 2), $k = 1$
d) M(–3; –5), $k = -1$ e) M(2; –4), $k = 0$ f) M ≡ O(0; 0), $k = 4$

Bài 4. Lập PTTS, PTCT (nếu có), PTTQ của các đường thẳng đi qua hai điểm A, B:
a) A(–2; 4), B(1; 0) b) A(5; 3), B(–2; –7) c) A(3; 5), B(3; 8)
d) A(–2; 3), B(1; 3) e) A(4; 0), B(3; 0) f) A(0; 3), B(0; –2)
g) A(3; 0), B(0; 5) h) A(0; 4), B(–3; 0) i) A(–2; 0), B(0; –6)

Bài 5. Viết PTTS, PTCT (nếu có), PTTQ của các đường thẳng đi qua điểm M và song song với đường thẳng d:
a) M(2; 3), d: $4x-10y+1=0$ b) M(–1; 2), $d \equiv Ox$ c) M(4; 3), $d \equiv Oy$
d) M(2; –3), d: $\begin{cases} x=1-2t \\ y=3+4t \end{cases}$ e) M(0; 3), d: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{-2}$

Bài 6. Viết PTTS, PTCT (nếu có), PTTQ của các đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng d:
a) M(2; 3), d: $4x-10y+1=0$ b) M(–1; 2), $d \equiv Ox$ c) M(4; 3), $d \equiv Oy$
d) M(2; –3), d: $\begin{cases} x=1-2t \\ y=3+4t \end{cases}$ e) M(0; 3), d: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{-2}$

Bài 7. Cho tam giác ABC. Viết phương trình các cạnh, các đường trung tuyến, các đường cao của tam giác với:
a) A(2; 0), B(2; –3), C(0; –1) b) A(1; 4), B(3; –1), C(6; 2)
c) A(–1; –1), B(1; 9), C(9; 1) d) A(4; –1), B(–3; 2), C(1; 6)

Bài 8. Cho tam giác ABC, biết phương trình ba cạnh của tam giác. Viết phương trình các đường cao của tam giác, với:
a) $AB: 2x-3y-1=0,\ BC: x+3y+7=0,\ CA: 5x-2y+1=0$
b) $AB: 2x+y+2=0,\ BC: 4x+5y-8=0,\ CA: 4x-y-8=0$

Bài 9. Viết phương trình các cạnh và các trung trực của tam giác ABC biết trung điểm của các cạnh BC, CA, AB lần lượt là các điểm M, N, P, với:
a) M(–1; –1), N(1; 9), P(9; 1) b) $M\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{2}\right), N\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{7}{2}\right), P(2;-4)$
c) $M\left(2;-\dfrac{3}{2}\right), N\left(1;-\dfrac{1}{2}\right), P(1;-2)$ d) $M\left(\dfrac{3}{2};2\right), N\left(\dfrac{7}{2};3\right), P(1;4)$

Bài 10. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và chắn trên hai trục toạ độ 2 đoạn bằng nhau, với:
a) M(–4; 10) b) M(2; 1) c) M(–3; –2) d) M(2; –1)

Bài 11. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và cùng với hai trục toạ độ tạo thành một tam giác có diện tích S, với:
a) M(–4; 10), S = 2 b) M(2; 1), S = 4 c) M(–3; –2), S = 3 d) M(2; –1), S = 4

Bài 12. Tìm hình chiếu của điểm M lên đường thẳng d và điểm M′ đối xứng với M qua đường thẳng d với:
a) M(2; 1), $d: 2x+y-3=0$ b) M(3; – 1), $d: 2x+5y-30=0$
c) M(4; 1), $d: x-2y+4=0$ d) M(– 5; 13), $d: 2x-3y-3=0$

Bài 13. Lập phương trình đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua đường thẳng Δ, với:

a) $d: 2x - y + 1 = 0,\ \Delta: 3x - 4y + 2 = 0$ b) $d: x - 2y + 4 = 0,\ \Delta: 2x + y - 2 = 0$

c) $d: x + y - 1 = 0,\ \Delta: x - 3y + 3 = 0$ d) $d: 2x - 3y + 1 = 0,\ \Delta: 2x - 3y - 1 = 0$

Bài 14. Lập phương trình đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua điểm I, với:

a) $d: 2x - y + 1 = 0,\ I(2;1)$ b) $d: x - 2y + 4 = 0,\ I(-3;0)$

c) $d: x + y - 1 = 0,\ I(0;3)$ d) $d: 2x - 3y + 1 = 0,\ I \equiv O(0;0)$

VẤN ĐỀ 2: Các bài toán dựng tam giác

Đó là các bài toán xác định toạ độ các đỉnh hoặc phương trình các cạnh của một tam giác khi biết một số yếu tố của tam giác đó.

Để giải loại bài toán này ta thường sử dụng đến các cách dựng tam giác.

Sau đây là một số dạng:

Dạng 1: *Dựng tam giác ABC, khi biết các đường thẳng chứa cạnh BC và hai đường cao BB′, CC′.*

Cách dựng:
- *Xác định B = BC ∩ BB′, C = BC ∩ CC′.*
- *Dựng AB qua B và vuông góc với CC′.*
- *Dựng AC qua C và vuông góc với BB′.*
- *Xác định A = AB ∩ AC.*

Dạng 2: *Dựng tam giác ABC, khi biết đỉnh A và hai đường thẳng chứa hai đường cao BB′, CC′.*

Cách dựng:
- *Dựng AB qua A và vuông góc với CC′.*
- *Dựng AC qua A và vuông góc với BB′.*
- *Xác định B = AB ∩ BB′, C = AC ∩ CC′.*

Dạng 3: *Dựng tam giác ABC, khi biết đỉnh A và hai đường thẳng chứa hai đường trung tuyến BM, CN.*

Cách dựng:
- *Xác định trọng tâm G = BM ∩ CN.*
- *Xác định A′ đối xứng với A qua G (suy ra BA′ // CN, CA′ // BM).*
- *Dựng d_B qua A′ và song song với CN.*
- *Dựng d_C qua A′ và song song với BM.*
- *Xác định B = BM ∩ d_B, C = CN ∩ d_C.*

Dạng 4: *Dựng tam giác ABC, khi biết hai đường thẳng chứa hai cạnh AB, AC và trung điểm M của cạnh BC.*

Cách dựng:
- *Xác định A = AB ∩ AC.*
- *Dựng d_1 qua M và song song với AB.*
- *Dựng d_2 qua M và song song với AC.*
- *Xác định trung điểm I của AC: I = AC ∩ d_1.*
- *Xác định trung điểm J của AB: J = AB ∩ d_2.*
- *Xác định B, C sao cho* $\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{AJ},\ \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$.

Cách khác: *Trên AB lấy điểm B, trên AC lấy điểm C sao cho* $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC}$.

Bài 1. Cho tam giác ABC, biết phương trình một cạnh và hai đường cao. Viết phương trình hai cạnh và đường cao còn lại, với: *(dạng 1)*

a) $AB: 4x + y - 12 = 0,\ BB': 5x - 4y - 15 = 0,\ CC': 2x + 2y - 9 = 0$

b) $BC: 5x - 3y + 2 = 0,\ BB': 4x - 3y + 1 = 0,\ CC': 7x + 2y - 22 = 0$

c) $BC: x - y + 2 = 0,\ BB': 2x - 7y - 6 = 0,\ CC': 7x - 2y - 1 = 0$

d) $BC: 5x - 3y + 2 = 0,\ BB': 2x - y - 1 = 0,\ CC': x + 3y - 1 = 0$

Bài 2. Cho tam giác ABC, biết toạ độ một đỉnh và phương trình hai đường cao. Viết phương trình các cạnh của tam giác đó, với: *(dạng 2)*

a) $A(3;0),\ BB': 2x+2y-9=0,\ CC': 3x-12y-1=0$

b) $A(1;0),\ BB': x-2y+1=0,\ CC': 3x+y-1=0$

Bài 3. Cho tam giác ABC, biết toạ độ một đỉnh và phương trình hai đường trung tuyến. Viết phương trình các cạnh của tam giác đó, với: *(dạng 3)*

a) $A(1;3),\ BM: x-2y+1=0,\ CN: y-1=0$

b) $A(3;9),\ BM: 3x-4y+9=0,\ CN: y-6=0$

Bài 4. Cho tam giác ABC, biết phương trình một cạnh và hai đường trung tuyến. Viết phương trình các cạnh còn lại của tam giác đó, với:

a) $AB: x-2y+7=0,\ AM: x+y-5=0,\ BN: 2x+y-11=0$

HD: a) $AC: 16x+13y-68=0,\ BC: 17x+11y-106=0$

Bài 5. Cho tam giác ABC, biết phương trình hai cạnh và toạ độ trung điểm của cạnh thứ ba. Viết phương trình của cạnh thứ ba, với: *(dạng 4)*

a) $AB: 2x+y-2=0,\ AC: x+3y-3=0,\ M(-1;1)$

b) $AB: 2x-y-2=0,\ AC: x+y+3=0,\ M(3;0)$

c) $AB: x-y+1=0,\ AC: 2x+y-1=0,\ M(2;1)$

d) $AB: x+y-2=0,\ AC: 2x+6y+3=0,\ M(-1;1)$

Bài 6. Cho tam giác ABC, biết toạ độ một đỉnh, phương trình một đường cao và một trung tuyến. Viết phương trình các cạnh của tam giác đó, với:

a) $A(4;-1),\ BH: 2x-3y+12=0,\ BM: 2x+3y=0$

b) $A(2;-7),\ BH: 3x+y+11=0,\ CN: x+2y+7=0$

c) $A(0;-2),\ BH: x-2y+1=0,\ CN: 2x-y+2=0$

d) $A(-1;2),\ BH: 5x-2y-4=0,\ CN: 5x+7y-20=0$

Bài 7.

a)

VẤN ĐỀ 3: Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1x+b_1y+c_1=0$ và Δ_2: $a_2x+b_2y+c_2=0$.

Toạ độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \quad (1)$$

- *Δ_1 cắt Δ_2 ⇔ hệ (1) có một nghiệm* $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ *(nếu $a_2, b_2, c_2 \neq 0$)*
- *$\Delta_1 \,//\, \Delta_2$ ⇔ hệ (1) vô nghiệm* $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ *(nếu $a_2, b_2, c_2 \neq 0$)*
- *$\Delta_1 \equiv \Delta_2$ ⇔ hệ (1) có vô số nghiệm* $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ *(nếu $a_2, b_2, c_2 \neq 0$)*

Để chứng minh ba đường thẳng đồng qui, ta có thể thực hiện như sau:

– Tìm giao điểm của hai trong ba đường thẳng.

– Chứng tỏ đường thẳng thứ ba đi qua giao điểm đó.

Bài 1. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau, nếu chúng cắt nhau thì tìm toạ độ giao điểm của chúng:

a) $2x+3y+1=0,\quad 4x+5y-6=0$ b) $4x-y+2=0,\quad -8x+2y+1=0$

c) $\begin{cases}x=5+t\\y=-3+2t\end{cases},\quad \begin{cases}x=4+2t\\y=-7+3t\end{cases}$ d) $\begin{cases}x=1-t\\y=-2+2t\end{cases},\quad \begin{cases}x=2+3t\\y=-4-6t\end{cases}$

e) $\begin{cases}x=5+t\\y=-1\end{cases},\quad x+y-5=0$ f) $x=2,\quad x+2y-4=0$

Bài 2. Cho hai đường thẳng *d* và Δ. Tìm *m* để hai đường thẳng:

i) cắt nhau ii) song song iii) trùng nhau

a) $d: mx-5y+1=0,\quad \Delta: 2x+y-3=0$

b) $d: 2mx+(m-1)y-2=0,\ \Delta: (m+2)x+(2m+1)y-(m+2)=0$

c) $d: (m-2)x+(m-6)y+m-1=0,\ \Delta: (m-4)x+(2m-3)y+m-5=0$

d) $d: (m+3)x+2y+6=0,\ \Delta: mx+y+2-m=0$

Bài 3. Tìm *m* để ba đường thẳng sau đồng qui:

a) $y=2x-1,\quad 3x+5y=8,\quad (m+8)x-2my=3m$

b) $y=2x-m,\quad y=-x+2m,\quad mx-(m-1)y=2m-1$

c) $5x+11y=8,\quad 10x-7y=74,\quad 4mx+(2m-1)y+m+2$

d) $3x-4y+15=0,\ 5x+2y-1=0,\ mx-(2m-1)y+9m-13=0$

Bài 4. Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 và:

a) $d_1: 3x-2y+10=0,\ d_2: 4x+3y-7=0,\ d$ *qua* $A(2;1)$

b) $d_1: 3x-5y+2=0,\ d_2: 5x-2y+4=0,\ d$ *song song* $d_3: 2x-y+4=0$

c) $d_1: 3x-2y+5=0,\ d_2: 2x+4y-7=0,\ d$ *vuông góc* $d_3: 4x-3y+5=0$

Bài 5. Tìm điểm mà các đường thẳng sau luôn đi qua với mọi *m*:

a) $(m-2)x-y+3=0$ b) $mx-y+(2m+1)=0$

c) $mx-y-2m-1=0$ d) $(m+2)x-y+1=0$

Bài 6. Cho tam giác ABC với A(0; –1), B(2; –3), C(2; 0).

a) Viết phương trình các đường trung tuyến, phương trình các đường cao, phương trình các đường trung trực của tam giác.

b) Chứng minh các đường trung tuyến đồng qui, các đường cao đồng qui, các đường trung trực đồng qui.

Bài 7. Hai cạnh của hình bình hành ABCD có phương trình $x-3y=0,\ 2x+5y+6=0$, đỉnh C(4; –1). Viết phương trình hai cạnh còn lại.

Bài 8. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và cách đều hai điểm P, Q với:

a) M(2; 5), P(–1; 2), Q(5; 4) b) M(1; 5), P(–2; 9), Q(3; –2)

Bài 9.

a)

VẤN ĐỀ 4: Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho đường thẳng Δ: $ax+by+c=0$ *và điểm* $M_0(x_0;y_0)$.

$$\boxed{d(M_0,\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

2. Vị trí tương đối của hai điểm đối với một đường thẳng

Cho đường thẳng Δ: $ax+by+c=0$ *và hai điểm* $M(x_M;y_M),\ N(x_N;y_N)\notin\Delta$.

– M, N nằm cùng phía đối với Δ $\Leftrightarrow (ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)>0$.

– M, N nằm khác phía đối với Δ ⇔ $(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$.

3. Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ₁: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ *và Δ₂:* $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ *cắt nhau.*

Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1 *và* Δ_2 *là:*

$$\boxed{\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}$$

Chú ý: *Để lập phương trình đường phân giác trong hoặc ngoài của góc A trong tam giác ABC ta có thể thực hiện như sau:*

Cách 1:

– Tìm toạ độ chân đường phân giác trong hoặc ngoài (dựa vào tính chất đường phân giác của góc trong tam giác).

Cho ΔABC với đường phân giác trong AD và phân giác ngoài AE (D, E ∈ BC)

ta có: $\overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC}.\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EB} = \frac{AB}{AC}.\overrightarrow{EC}$.

– Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.

Cách 2:

– Viết phương trình các đường phân giác d_1, d_2 *của các góc tạo bởi hai đường thẳng AB, AC.*

– Kiểm tra vị trí của hai điểm B, C đối với d_1 *(hoặc* d_2*).*

+ Nếu B, C nằm khác phía đối với d_1 *thì* d_1 *là đường phân giác trong.*

+ Nếu B, C nằm cùng phía đối với d_1 *thì* d_1 *là đường phân giác ngoài.*

Bài 1. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng *d*, với:

a) $M(4;-5),\ d: 3x - 4y + 8 = 0$ b) $M(3;5),\ d: x + y + 1 = 0$

c) $M(4;-5),\ d: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ d) $M(3;5),\ d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3}$

Bài 2.

a) Cho đường thẳng Δ: $2x - y + 3 = 0$. Tính bán kính đường tròn tâm I(–5; 3) và tiếp xúc với Δ.

b) Cho hình chữ nhật ABCD có phương trình 2 cạnh là: $2x - 3y + 5 = 0,\ 3x + 2y - 7 = 0$ và đỉnh A(2; –3). Tính diện tích hình chữ nhật đó.

c) Tính diện tích hình vuông có 4 đỉnh nằm trên 2 đường thẳng song song: $d_1: 3x - 4y + 6 = 0$ và $d_2: 6x - 8y - 13 = 0$.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Tính diện tích tam giác ABC, với:

a) A(–1; –1), B(2; –4), C(4; 3) b) A(–2; 14), B(4; –2), C(5; –4)

Bài 4. Viết phương trình đường thẳng *d* song song và cách đường thẳng Δ một khoảng *k*, với:

a) $\Delta: 2x - y + 3 = 0,\ k = \sqrt{5}$ b) $\Delta: \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + 4t \end{cases},\ k = 3$

c) $\Delta: y - 3 = 0,\ k = 5$ d) $\Delta: x - 2 = 0,\ k = 4$

Bài 5. Viết phương trình đường thẳng *d* song song với đường thẳng Δ và cách điểm A một khoảng bằng *k*, với:

a) $\Delta: 3x - 4y + 12 = 0,\ A(2;3),\ k = 2$ b) $\Delta: x + 4y - 2 = 0,\ A(-2;3),\ k = 3$

c) $\Delta: y - 3 = 0,\ A(3;-5),\ k = 5$ d) $\Delta: x - 2 = 0,\ A(3;1),\ k = 4$

Bài 6. Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cách B một khoảng bằng *d*, với:

a) A(–1; 2), B(3; 5), *d* = 3 b) A(–1; 3), B(4; 2), *d* = 5

c) A(5; 1), B(2; –3), *d* = 5 d) A(3; 0), B(0; 4), *d* = 4.

Bài 7. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và cách đều hai điểm P, Q, với:

a) M(2; 5), P(–1; 2), Q(5; 4) b) M(1; 2), P(2; 3), Q(4; –5)

c) M(10; 2), P(3; 0), Q(–5; 4) d) M(2; 3), P(3; –1), Q(3; 5)

Bài 8. Viết phương trình đường thẳng *d* cách điểm A một khoảng bằng *h* và cách điểm B một khoảng bằng *k*, với:

a) A(1; 1), B(2; 3), *h* = 2, *k* = 4 b) A(2; 5), B(–1; 2), *h* = 1, *k* = 3

Bài 9. Cho đường thẳng Δ: $x-y+2=0$ và các điểm O(0; 0), A(2; 0), B(–2; 2).

a) Chứng minh đường thẳng Δ cắt đoạn thẳng AB.

b) Chứng minh rằng hai điểm O, A nằm cùng về một phía đối với đường thẳng Δ.

c) Tìm điểm O′ đối xứng với O qua Δ.

d) Trên Δ, tìm điểm M sao cho độ dài đường gấp khúc OMA ngắn nhất.

Bài 10. Cho hai điểm A(2; 2), B(5; 1). Tìm điểm C trên đường thẳng Δ: $x-2y+8=0$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng 17 (đvdt).

HD: $C(12;10),\ C\left(-\frac{76}{5};-\frac{18}{5}\right)$.

Bài 11. Tìm tập hợp điểm.

a) Tìm tập hợp các điểm cách đường thẳng Δ: $-2x+5y-1=0$ một khoảng bằng 3.

b) Tìm tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng $d: 5x+3y-3=0,\ \Delta: 5x+3y+7=0$.

c) Tìm tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng $d: 4x-3y+2=0,\ \Delta: y-3=0$.

d) Tìm tập hợp các điểm có tỉ số các khoảng cách đến hai đường thẳng sau bằng $\frac{5}{13}$:

$d: 5x-12y+4=0$ và $\Delta: 4x-3y-10=0$.

Bài 12. Viết phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng:

a) $3x-4y+12=0,\ 12x+5y-20=0$ b) $3x-4y-9=0,\ 8x-6y+1=0$

c) $x+3y-6=0,\ 3x+y+2=0$ d) $x+2y-11=0,\ 3x-6y-5=0$

Bài 13. Cho tam giác ABC. Tìm tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, với:

a) A(–3; –5), B(4; –6), C(3; 1)

b) A(1; 2), B(5; 2), C(1; –3)

c) $AB: 2x-3y+21=0,\ BC: 2x+3y+9=0,\ CA: 3x-2y-6=0$

d) $AB: 4x+3y+12=0,\ BC: 3x-4y-24=0,\ CA: 3x+4y-6=0$

Bài 14.

a)

VẤN ĐỀ 4: Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1x+b_1y+c_1=0$ *(có VTPT* $\vec{n}_1=(a_1;b_1)$*)*

và Δ_2: $a_2x+b_2y+c_2=0$ *(có VTPT* $\vec{n}_2=(a_2;b_2)$*).*

$$(\Delta_1,\Delta_2)=\begin{cases}(\vec{n}_1,\vec{n}_2) & khi\ (\vec{n}_1,\vec{n}_2)\le 90^0\\ 180^0-(\vec{n}_1,\vec{n}_2) & khi\ (\vec{n}_1,\vec{n}_2)>90^0\end{cases}$$

$$\boxed{\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=\frac{\left|\vec{n}_1.\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|.\left|\vec{n}_2\right|}=\frac{\left|a_1b_1+a_2b_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}}$$

Chú ý: • $0^0\le\left(\Delta_1,\Delta_2\right)\le 90^0$.

• $\Delta_1\perp\Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$.

• *Cho Δ_1: $y = k_1x + m_1$, Δ_2: $y = k_2x + m_2$ thì:*

+ $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$ + $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 . k_2 = -1$.

• *Cho ΔABC. Để tính góc A trong ΔABC, ta có thể sử dụng công thức:*

$$\boxed{\cos A = \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}}$$

Bài 1. Tính góc giữa hai đường thẳng:

a) $x-2y-1=0,\ x+3y-11=0$ b) $2x-y+5=0,\ 3x+y-6=0$

c) $3x-7y+26=0,\ 2x+5y-13=0$ d) $3x+4y-5=0,\ 4x-3y+11=0$

Bài 2. Tính số đo của các góc trong tam giác ABC, với:

a) A(–3; –5), B(4; –6), C(3; 1)

b) A(1; 2), B(5; 2), C(1; –3)

c) $AB: 2x-3y+21=0,\ BC: 2x+3y+9=0,\ CA: 3x-2y-6=0$

d) $AB: 4x+3y+12=0,\ BC: 3x-4y-24=0,\ CA: 3x+4y-6=0$

Bài 3. Cho hai đường thẳng *d* và Δ. Tìm *m* để góc giữa hai đường thẳng đó bằng α, với:

a) $d: 2mx+(m-3)y+4m-1=0,\ \Delta: (m-1)x+(m+2)y+m-2=0,\ \alpha = 45^0$.

b) $d: (m+3)x-(m-1)y+m-3=0,\ \Delta: (m-2)x+(m+1)y-m-1=0,\ \alpha = 90^0$.

Bài 4. Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua điểm A và tạo với đường thẳng Δ một góc α, với:

a) $A(6;2),\ \Delta: 3x+2y-6=0,\ \alpha = 45^0$ b) $A(-2;0),\ \Delta: x+3y-3=0,\ \alpha = 45^0$

c) $A(2;5),\ \Delta: x+3y+6=0,\ \alpha = 60^0$ d) $A(1;3),\ \Delta: x-y=0,\ \alpha = 30^0$

Bài 5. Cho hình vuông ABCD có tâm I(4; –1) và phương trình một cạnh là $3x-y+5=0$.

a) Viết phương trình hai đường chéo của hình vuông.

b) Tìm toạ độ 4 đỉnh của hình vuông.

Bài 6.

a)

II. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

1. Phương trình đường tròn

Phương trình đường tròn có tâm *I(a; b)* và bán kính *R*: $\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$.

Nhận xét: Phương trình $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$, với $a^2+b^2-c>0$, là phương trình đường tròn tâm *I(–a; –b)*, bán kính *R* = $\sqrt{a^2+b^2-c}$.

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Cho đường tròn (C) có tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ.

$$\boxed{\Delta \text{ tiếp xúc với (C)} \Leftrightarrow d(I,\Delta)=R}$$

VẤN ĐỀ 1: Xác định tâm và bán kính của đường tròn

• *Nếu phương trình đường tròn (C) có dạng:* $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$
thì (C) có tâm I(a; b) và bán kính R.

• *Nếu phương trình đường tròn (C) có dạng:* $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$

thì – *Biến đổi đưa về dạng* $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

hoặc – *Tâm I(–a; –b), bán kính R =* $\sqrt{a^2+b^2-c}$.

Chú ý: *Phương trình* $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ *là phương trình đường tròn nếu thoả mãn điều kiện:* $a^2+b^2-c>0$.

Bài 15. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình đường tròn. Tìm tâm và bán kính của đường tròn đó:

a) $x^2+y^2-2x-2y-2=0$ b) $x^2+y^2-6x+4y-12=0$

c) $x^2+y^2+2x-8y+1=0$ d) $x^2+y^2-6x+5=0$

e) $16x^2+16y^2+16x-8y=11$ f) $7x^2+7y^2-4x+6y-1=0$

g) $2x^2+2y^2-4x+12y+11=0$ h) $4x^2+4y^2+4x-5y+10=0$

Bài 16. Tìm *m* để các phương trình sau là phương trình đường tròn:

a) $x^2+y^2+4mx-2my+2m+3=0$

b) $x^2+y^2-2(m+1)x+2my+3m^2-2=0$

c) $x^2+y^2-2(m-3)x+4my-m^2+5m+4=0$

d) $x^2+y^2-2mx-2(m^2-1)y+m^4-2m^4-2m^2-4m+1=0$

Bài 17. * Tìm *m* để các phương trình sau là phương trình đường tròn:

a) $x^2+y^2-6x+2y\ln m+3\ln m+7=0$

b) $x^2+y^2-2x+4y+\ln(m-2)+4=0$

c) $x^2+y^2-2e^{2m}x+2e^{m}y+6e^{2m}-4=0$

d) $x^2+y^2-2x\cos m+4y+\cos^2 m-2\sin m+5=0$

e) $x^2+y^2-4x\cos m+2y\sin m-4=0$

Bài 18.

a)

VẤN ĐỀ 2: Lập phương trình đường tròn

Để lập phương trình đường tròn (C) ta thường cần phải xác định ***tâm I (a; b)*** *và* ***bán kính R*** *của (C). Khi đó phương trình đường tròn (C) là:*

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

Dạng 1: *(C) có tâm I và đi qua điểm A.*
– *Bán kính R = IA.*

Dạng 2: *(C) có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ.*
– *Bán kính R =* $d(I,\Delta)$.

Dạng 3: *(C) có đường kính AB.*
– *Tâm I là trung điểm của AB.*
– *Bán kính R =* $\dfrac{AB}{2}$.

Dạng 4: *(C) đi qua hai điểm A, B và có tâm I nằm trên đường thẳng Δ.*
– *Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB.*
– *Xác định tâm I là giao điểm của d và Δ.*
– *Bán kính R = IA.*

Dạng 5: *(C) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng Δ.*
– *Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB.*
– *Tâm I của (C) thoả mãn:* $\begin{cases} I \in d \\ d(I,\Delta)=IA \end{cases}$.
– *Bán kính R = IA.*

Dạng 6: *(C) đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm B.*
– *Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB.*
– *Viết phương trình đường thẳng Δ′ đi qua B và vuông góc với Δ.*
– *Xác định tâm I là giao điểm của d và Δ′.*
– *Bán kính R = IA.*

Dạng 7: *(C) đi qua điểm A và tiếp xúc với hai đường thẳng* Δ_1 *và* Δ_2.
– *Tâm I của (C) thoả mãn:* $\begin{cases} d(I,\Delta_1)=d(I,\Delta_2) & (1) \\ d(I,\Delta_1)=IA & (2) \end{cases}$
– *Bán kính R = IA.*

Chú ý: – *Muốn bỏ dấu GTTĐ trong (1), ta xét dấu miền mặt phẳng định bởi* Δ_1 *và* Δ_2 *hay xét dấu khoảng cách đại số từ A đến* Δ_1 *và* Δ_2.
– *Nếu* $\Delta_1 // \Delta_2$, *ta tính R =* $\dfrac{1}{2}d(\Delta_1,\Delta_2)$, *và (2) được thay thế bởi IA = R.*

Dạng 8: *(C) tiếp xúc với hai đường thẳng* Δ_1, Δ_2 *và có tâm nằm trên đường thẳng d.*
– *Tâm I của (C) thoả mãn:* $\begin{cases} d(I,\Delta_1)=d(I,\Delta_2) \\ I \in d \end{cases}$.
– *Bán kính R =* $d(I,\Delta_1)$.

Dạng 9: *(C) đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C (đường tròn ngoại tiếp tam giác).*

Cách 1: – *Phương trình của (C) có dạng:* $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ *(*).*
– *Lần lượt thay toạ độ của A, B, C vào (*) ta được hệ phương trình.*
– *Giải hệ phương trình này ta tìm được a, b, c* $\Rightarrow$ *phương trình của (C).*

Cách 2: – *Tâm I của (C) thoả mãn:* $\begin{cases} IA=IB \\ IA=IC \end{cases}$.
– *Bán kính R = IA = IB = IC.*

Dạng 10: *(C) nội tiếp tam giác ABC.*

– Viết phương trình của hai đường phân giác trong của hai góc trong tam giác

– Xác định tâm I là giao điểm của hai đường phân giác trên.

– Bán kính $R = d(I, AB)$.

Bài 1. Viết phương trình đường tròn có tâm I và đi qua điểm A, với: *(dạng 1)*

a) I(2; 4), A(–1; 3) b) I(–3; 2), A(1; –1) c) I(–1; 0), A(3; –11) d) I(1; 2), A(5; 2)

Bài 2. Viết phương trình đường tròn có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ, với: *(dạng 2)*

a) $I(3;4),\ \Delta: 4x-3y+15=0$ b) $I(2;3),\ \Delta: 5x-12y-7=0$

c) $I(-3;2),\ \Delta \equiv Ox$ d) $I(-3;-5),\ \Delta \equiv Oy$

Bài 3. Viết phương trình đường tròn có đường kính AB, với: *(dạng 3)*

a) A(–2; 3), B(6; 5) b) A(0; 1), C(5; 1) c) A(–3; 4), B(7; 2) d) A(5; 2), B(3; 6)

Bài 4. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có tâm I nằm trên đường thẳng Δ, với: *(dạng 4)*

a) $A(2;3),\ B(-1;1),\ \Delta: x-3y-11=0$ b) $A(0;4),\ B(2;6),\ \Delta: x-2y+5=0$

c) $A(2;2),\ B(8;6),\ \Delta: 5x-3y+6=0$

Bài 5. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng Δ, với: *(dạng 5)*

a) $A(1;2),\ B(3;4),\ \Delta: 3x+y-3=0$ b) $A(6;3),\ B(3;2),\ \Delta: x+2y-2=0$

c) $A(-1;-2),\ B(2;1),\ \Delta: 2x-y+2=0$ d) $A(2;0),\ B(4;2),\ \Delta \equiv Oy$

Bài 6. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm B, với: *(dạng 6)*

a) $A(-2;6),\ \Delta: 3x-4y-15=0,\ B(1;-3)$ b) $A(-2;1),\ \Delta: 3x-2y-6=0,\ B(4;3)$

c) $A(6;-2),\ \Delta \equiv Ox,\ B(6;0)$ d) $A(4;-3),\ \Delta: x+2y-3=0,\ B(3;0)$

Bài 7. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2, với: *(dạng 7)*

a) $A(2;3),\ \Delta_1: 3x-4y+1=0,\ \Delta_2: 4x+3y-7=0$

b) $A(1;3),\ \Delta_1: x+2y+2=0,\ \Delta_2: 2x-y+9=0$

c) $A \equiv O(0;0),\ \Delta_1: x+y-4=0,\ \Delta_2: x+y+4=0$

d) $A(3;-6),\ \Delta_1 \equiv Ox,\ \Delta_2 \equiv Oy$

Bài 8. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và có tâm nằm trên đường thẳng d, với: *(dạng 8)*

a) $\Delta_1: 3x+2y+3=0,\ \Delta_2: 2x-3y+15=0,\ d: x-y=0$

b) $\Delta_1: x+y+4=0,\ \Delta_2: 7x-y+4=0,\ d: 4x+3y-2=0$

c) $\Delta_1: 4x-3y-16=0,\ \Delta_2: 3x+4y+3=0,\ d: 2x-y+3=0$

d) $\Delta_1: 4x+y-2=0,\ \Delta_2: x+4y+17=0,\ d: x-y+5=0$

Bài 9. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, với: *(dạng 9)*

a) A(2; 0), B(0; –3), C(5; –3) b) A(5; 3), B(6; 2), C(3; –1)

c) A(1; 2), B(3; 1), C(–3; –1) d) A(–1; –7), B(–4; –3), C ≡ O(0; 0)

e) $AB: x-y+2=0,\ BC: 2x+3y-1=0,\ CA: 4x+y-17=0$

f) $AB: x+2y-5=0,\ BC: 2x+y-7=0,\ CA: x-y+1=0$

Bài 10. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC, với: *(dạng 10)*

a) A(2; 6), B(–3; –4), C(5; 0) b) A(2; 0), B(0; –3), C(5; –3)

c) $AB: 2x-3y+21=0,\ BC: 3x-2y-6=0,\ CA: 2x+3y+9=0$

d) $AB: 7x-y+11=0,\ BC: x+y-15,\ CA: 7x+17y+65=0$

Bài 11.

a)

VẤN ĐỀ 3: Tập hợp điểm

1. Tập hợp các tâm đường tròn

Để tìm tập hợp các tâm I của đường tròn (C), ta có thể thực hiện như sau:

a) Tìm giá trị của m để tồn tại tâm I.

b) Tìm toạ độ tâm I. Giả sử: I $\begin{cases} x = f(m) \\ y = g(m) \end{cases}$.

c) Khử m giữa x và y ta được phương trình F(x; y) = 0.

d) Giới hạn: Dựa vào điều kiện của m ở a) để giới hạn miền của x hoặc y.

e) Kết luận: Phương trình tập hợp điểm là F(x; y) = 0 cùng với phần giới hạn ở d).

2. Tập hợp điểm là đường tròn

Thực hiện tương tự như trên.

Bài 1. Tìm tập hợp các tâm I của đường tròn (C) có phương trình (*m* là tham số):

a) $x^2+y^2-2(m-1)x-4my+3m+11=0$

b) $x^2+y^2-2mx-4(m+1)y+3m+14=0$

c) $x^2+y^2-2mx-2m^2y+2=0$

d) $x^2+y^2+mx-m(m+2)y-2m^2-4=0$

Bài 2. * Tìm tập hợp các tâm I của đường tròn (C) có phương trình (*t* là tham số):

a) $x^2+y^2-2(\cos 2t+4)x-2y\sin 2t+6\cos 2t-3=0$

b) $x^2+y^2-4x\sin t+4(\cos 2t-\sin t)y-2\cos^2 t=0$

c) $x^2+y^2-2(2-e^t)x+4(e^{2t}-1)y-e^t-3=0$

d) $(t^2+1)(x^2+y^2)+8(t^2-1)x-4(t^2+4t+1)y-3t^2-3=0$

Bài 3. Tìm tập hợp các tâm I của đường tròn (C), biết:

a) (C) tiếp xúc với đường thẳng $d: 6x-8y+15=0$ và có bán kính R = 3

b) (C) tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1: x+2y-3=0,\ d_2: x+2y+6=0$

c) (C) tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1: 2x+3y-6=0,\ d_2: 3x-2y+9=0$

d) (C) tiếp xúc với đường tròn $(C'): x^2+y^2-4x+6y-3=0$ và có bán kính R = 2.

e) (C) đi qua điểm A(2; 3) và tiếp xúc với đường thẳng $d: y-5=0$

Bài 4. Cho hai điểm A(2; –4), B(–6; 2). Tìm tập hợp các điểm M(*x; y*) sao cho:

a) $AM^2+BM^2=100$ b) $\dfrac{MA}{MB}=3$ c) $AM^2+BM^2=k^2$ (*k* > 0)

Bài 5. Cho hai điểm A(2; 3), B(–2; 1). Tìm tập hợp các điểm M(*x; y*) sao cho:

a) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ b) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=4$

Bài 6. Tìm tập hợp các điểm M sao cho tổng bình phương các khoảng cách từ đó đến hai đường thẳng *d* và *d′* bằng *k*, với:

a) $d: x-y+3=0,\ d': x+y=1=0,\ k=9$ b)

Bài 7. Cho bốn điểm A(4; 4), B(–6; 4), C(–6; –2), D(4; –2).

a) Chứng tỏ rằng ABCD là hình chữ nhật.

b) Tìm tập hợp các điểm M sao cho tổng bình phương các khoảng cách từ M đến các cạnh của hình chữ nhật bằng 100.

Bài 8.

a)

VẤN ĐỀ 4: Vị trí tương đối của đường thẳng *d* và đường tròn (C)

Để biện luận số giao điểm của đường thẳng d: $Ax+By+C=0$ *và đường tròn (C):* $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$*, ta có thể thực hiện như sau:.*

• ***Cách 1:*** *So sánh khoảng cách từ tâm I đến d với bán kính R.*

– *Xác định tâm I và bán kính R của (C).*

– *Tính khoảng cách từ I đến d.*

+ $d(I,d)<R$ $\Leftrightarrow$ *d cắt (C) tại hai điểm phân biệt.*

+ $d(I,d)=R$ $\Leftrightarrow$ *d tiếp xúc với (C).*

+ $d(I,d)>R$ $\Leftrightarrow$ *d và (C) không có điểm chung.*

• ***Cách 2:*** *Toạ độ giao điểm (nếu có) của d và (C) là nghiệm của hệ phương trình:*

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ x^2+y^2+2ax+2by+c=0 \end{cases} \quad (*)$$

+ *Hệ (*) có 2 nghiệm* $\Leftrightarrow$ *d cắt (C) tại hai điểm phân biệt.*

+ *Hệ (*) có 1 nghiệm* $\Leftrightarrow$ *d tiếp xúc với (C).*

+ *Hệ (*) vô nghiệm* $\Leftrightarrow$ *d và (C) không có điểm chung.*

Bài 1. Biện luận theo *m* số giao điểm của đường thẳng *d* và đường tròn (C), với:

a) $d: mx-y-3m-2=0,\ (C): x^2+y^2-4x-2y=0$

b) $d: 2x-y+m=0,\ (C): x^2+y^2-6x+2y+5=0$

c) $d: x+y-1=0,\ (C): x^2+y^2-2(2m+1)x-4y+4-m=0$

d) $d: mx+y-4m=0,\ (C): x^2+y^2-2x-4y-4=0$

Bài 2. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ và đường thẳng *d* đi qua điểm A(–1; 0) và có hệ số góc k .

a) Viết phương trình đường thẳng *d*.

b) Biện luận theo *k* vị trí tương đối của *d* và (C).

c) Suy ra phương trình các tiếp tuyến của (C) xuất phát từ A.

Bài 3. Cho đường thẳng *d* và đường tròn (C):

i) Chứng tỏ *d* cắt (C). ii) Tìm toạ độ các giao điểm của *d* và (C).

a) *d* đi qua M(–1; 5) và có hệ số góc $k = -\frac{1}{3}$, $(C): x^2+y^2-6x-4y+8=0$

b) $d: 3x-y-10=0,\ (C): x^2+y^2-4x-2y-20=0$

Bài 4.

a)

VẤN ĐỀ 5: Vị trí tương đối của hai đường tròn (C_1) và (C_2)

Để biện luận số giao điểm của hai đường tròn

(C_1): $x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1=0$, ($C_2$): $x^2+y^2+2a_2x+2b_2y+c_2=0$.

ta có thể thực hiện như sau:

• ***Cách 1:*** *So sánh độ dài đoạn nối tâm I_1I_2 với các bán kính R_1, R_2.*

+ $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$ ⇔ *(C_1) cắt (C_2) tại 2 điểm.*

+ $I_1I_2 = R_1 + R_2$ ⇔ *(C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2).*

+ $I_1I_2 = |R_1 - R_2|$ ⇔ *(C_1) tiếp xúc trong với (C_2).*

+ $I_1I_2 > R_1 + R_2$ ⇔ *(C_1) và (C_2) ở ngoài nhau.*

+ $I_1I_2 < |R_1 - R_2|$ ⇔ *(C_1) và (C_2) ở trong nhau.*

• ***Cách 2:*** *Toạ độ các giao điểm (nếu có) của (C_1) và (C_2) là nghiệm của hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

+ Hệ (*) có hai nghiệm ⇔ *(C_1) cắt (C_2) tại 2 điểm.*
+ Hệ (*) có một nghiệm ⇔ *(C_1) tiếp xúc với (C_2).*
+ Hệ (*) vô nghiệm ⇔ *(C_1) và (C_2) không có điểm chung.*

Bài 1. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn (C_1) và (C_2), tìm toạ độ giao điểm, nếu có, với:

a) $(C_1): x^2 + y^2 + 6x - 10y + 24 = 0,\ (C_2): x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

b) $(C_1): x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0,\ (C_2): x^2 + y^2 - 10x - 14y + 70 = 0$

c) $(C_1): x^2 + y^2 - 6x - 3y = 0,\ (C_2)$ *có tâm* $I_2\left(5; \frac{5}{2}\right)$ *và bán kính* $R_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Bài 2. Biện luận số giao điểm của hai đường tròn (C_1) và (C_2), với:

a) $(C_1): x^2 + y^2 - 6x - 2my + m^2 + 4 = 0,\ (C_2): x^2 + y^2 - 2mx - 2(m+1)y + m^2 + 4 = 0$

b) $(C_1): x^2 + y^2 + 4mx - 2my + 2m + 3 = 0,\ (C_2): x^2 + y^2 + 4(m+1)x - 2my + 6m - 1 = 0$

Bài 3. Cho hai điểm A(8; 0), B(0; 6).

a) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của OA, AB, OB. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

c) Chứng minh rằng hai đường tròn trên tiếp xúc nhau. Tìm toạ độ tiếp điểm.

Bài 4.

a)

VẤN ĐỀ 6: Tiếp tuyến của đường tròn (C)

Cho đường tròn (C) có tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ.

Δ tiếp xúc với (C) ⇔ $d(I, \Delta) = R$

• ***Dạng 1:*** *Tiếp tuyến tại một điểm* $M_0(x_0; y_0) \in (C)$.

– Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ *và có VTPT* $\overrightarrow{IM_0}$.

• ***Dạng 2:*** *Tiếp tuyến có phương cho trước.*

– Viết phương trình của Δ có phương cho trước (phương trình chứa tham số t).

– Dựa vào điều kiện: $d(I, \Delta) = R$, *ta tìm được t. Từ đó suy ra phương trình của Δ.*

• ***Dạng 3:*** *Tiếp tuyến vẽ từ một điểm* $A(x_A; y_A)$ *ở ngoài đường tròn (C).*

– Viết phương trình của Δ đi qua A (chứa 2 tham số).

– Dựa vào điều kiện: $d(I, \Delta) = R$, *ta tìm được các tham số. Từ đó suy ra phương trình*

của Δ.

Bài 1. Cho đường tròn (C) và đường thẳng *d*.

i) Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) với các trục toạ độ.

ii) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với *d*.

iii) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với *d*.

a) $(C): x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0,\ d: 2x - y + 3 = 0$

b) $(C): x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0,\ d: 2x - 3y + 1 = 0$

Bài 2. Cho đường tròn (C), điểm A và đường thẳng *d*.

i) Chứng tỏ điểm A ở ngoài (C).

ii) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ A.

iii) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với *d*.

iv) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với *d*.

a) $(C): x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0,\ A(-7;7),\ d: 3x + 4y - 6 = 0$

b) $(C): x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 = 0,\ A(2;2),\ d: x + 2y - 6 = 0$

Bài 3. Cho hai điểm A(1; 2), B(3; 4) và đường thẳng $d: y = -3 - 3x$.

a) Viết phương trình các đường tròn (C_1) và (C_2) qua A, B và tiếp xúc với *d*.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung (khác *d*) của hai đường tròn đó.

Bài 4. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x - 2my + m^2 + 4 = 0$.

a) Tìm *m* để từ A(2; 3) có thể kẻ được hai tiếp tuyến với (C).

b) Viết phương trình các tiếp tuyến đó khi *m* = 6.

Bài 5.

a)

III. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP

1. Định nghĩa

Cho F_1, F_2 cố định với $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$.

$$\boxed{M \in (E) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a} \quad (a > c)$$

*F_1, F_2: các **tiêu điểm**, $F_1F_2 = 2c$: **tiêu cự**.*

2. Phương trình chính tắc của elip

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (a > b > 0,\ b^2 = a^2 - c^2)$$

- Toạ độ các tiêu điểm: $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$.
- Với M(*x; y*) ∈ (E), MF_1, MF_2 đgl các **bán kính qua tiêu điểm** của M.

$$\boxed{MF_1 = a + \frac{c}{a}x,\ MF_2 = a - \frac{c}{a}x}$$

3. Hình dạng của elip

- (E) nhận các trục toạ độ làm các trục đối xứng và gốc toạ độ làm tâm đối xứng.
- Toạ độ các đỉnh: $A_1(-a;0),\ A_2(a;0),\ B_1(0;-b),\ B_2(0;b)$
- Độ dài các trục: trục lớn: $A_1A_2 = 2a$, trục nhỏ: $B_1B_2 = 2b$
- **Tâm sai** của (E): $e = \frac{c}{a}$ (0 < e < 1)
- Hình chữ nhật cơ sở: tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a,\ y = \pm b$ (ngoại tiếp elip).

4. Đường chuẩn của elip *(chương trình nâng cao)*

- Phương trình các đường chuẩn Δ_i ứng với các tiêu điểm F_i là: $x \pm \frac{a}{e} = 0$
- Với M ∈ (E) ta có: $\boxed{\frac{MF_1}{d(M,\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M,\Delta_2)} = e}$ $(e < 1)$

VẤN ĐỀ 1: Xác định các yếu tố của (E)

Đưa phương trình của (E) về dạng chính tắc: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. *Xác định a, b, c.*

Các yếu tố:
- *Độ dài trục lớn 2a, trục nhỏ 2b.*
- *Tiêu cự 2c.*
- *Toạ độ các tiêu điểm* $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$.
- *Toạ độ các đỉnh* $A_1(-a;0),\ A_2(a;0),\ B_1(0;-b),\ B_2(0;b)$.
- *Tâm sai* $e = \frac{c}{a}$.
- *Phương trình các đường chuẩn* $x \pm \frac{a}{e} = 0$

Bài 19. Cho elip (E). Xác định độ dài các trục, tiêu cự, toạ độ các tiêu điểm, toạ độ các đỉnh, tâm sai, phương trình các đường chuẩn của (E), với (E) có phương trình:

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ c) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ d) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

e) $16x^2+25y^2=400$ f) $x^2+4y^2=1$ g) $4x^2+9y^2=5$ h) $9x^2+25y^2=1$

Bài 20.

a)

VẤN ĐỀ 2: Lập phương trình chính tắc của (E)

Để lập phương trình chính tắc của (E) ta cần xác định độ dài các nửa trục a, b của (E).

***Chú ý:** Công thức xác định các yếu tố của (E):*

+ $b^2=a^2-c^2$ + $e=\frac{c}{a}$ + *Các tiêu điểm* $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$

+ *Các đỉnh:* $A_1(-a;0),\ A_2(a;0),\ B_1(0;-b),\ B_2(0;b)$

Bài 1. Lập phương trình chính tắc của (E), biết:

a) Độ dài trục lớn bằng 6, trục nhỏ bằng 4.

b) Độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự bằng 6.

c) Độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục nhỏ bằng tiêu cự.

d) Tiêu cự bằng 8 và đi qua điểm $M\left(\sqrt{15};-1\right)$.

e) Độ dài trục nhỏ bằng 6 và đi qua điểm $M\left(-2\sqrt{5};2\right)$.

e) Một tiêu điểm là $F_1(-2;0)$ và độ dài trục lớn bằng 10.

f) Một tiêu điểm là $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$ và đi qua điểm $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

g) Đi qua hai điểm $M(1;0),\ N\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$.

h) Đi qua hai điểm $M\left(4;-\sqrt{3}\right),\ N\left(2\sqrt{2};3\right)$.

Bài 2. Lập phương trình chính tắc của (E), biết:

a) Độ dài trục lớn bằng 10, tâm sai bằng $\frac{3}{5}$.

b) Một tiêu điểm là $F_1(-8;0)$ và tâm sai bằng $\frac{4}{5}$.

c) Độ dài trục nhỏ bằng 6, phương trình các đường chuẩn là $x\sqrt{7}\pm 16=0$.

d) Một đỉnh là $A_1(-8;0)$, tâm sai bằng $\frac{3}{4}$.

e) Đi qua điểm $M\left(2;-\frac{5}{3}\right)$ và có tâm sai bằng $\frac{2}{3}$.

Bài 3.

a)

VẤN ĐỀ 3: Tìm điểm trên (E) thoả mãn điều kiện cho trước

Chú ý các công thức xác định độ dài bán kính qua tiêu điểm của điểm M(x; y) ∈ (E):

$$\boxed{MF_1 = a + \frac{c}{a}x,\ MF_2 = a - \frac{c}{a}x}$$

Bài 1. Cho elip (E) và đường thẳng *d* vuông góc với trục lớn tại tiêu điểm bên phải F_2 cắt (E) tại hai điểm M, N.

i) Tìm toạ độ các điểm M, N. ii) Tính MF_1, MF_2, MN.

a) $9x^2 + 25y^2 = 225$ b) $9x^2 + 16y^2 = 144$ c) $7x^2 + 16y^2 = 112$

Bài 2. Cho elip (E). Tìm những điểm M ∈ (E) sao cho:

i) $MF_1 = MF_2$ ii) $MF_2 = 3MF_1$ iii) $MF_1 = 4MF_2$

a) $9x^2 + 25y^2 = 225$ b) $9x^2 + 16y^2 = 144$ c) $7x^2 + 16y^2 = 112$

Bài 3. Cho elip (E). Tìm những điểm M ∈ (E) nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông, với:

a) $9x^2 + 25y^2 = 225$ b) $9x^2 + 16y^2 = 144$ c) $7x^2 + 16y^2 = 112$

Bài 4. Cho elip (E). Tìm những điểm M ∈ (E) nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 60^0, với:

a) $9x^2 + 25y^2 = 225$ b) $9x^2 + 16y^2 = 144$ c) $7x^2 + 16y^2 = 112$

Bài 5.

a)

VẤN ĐỀ 4: Tập hợp điểm

Để tìm tập hợp các điểm M(x; y) thoả điều kiện cho trước, ta đưa về một trong các dạng:

Dạng 1: $MF_1 + MF_2 = 2a$ ⇒ *Tập hợp là elip (E) có hai tiêu điểm F_1, F_2, trục lớn 2a.*

Dạng 2: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *(a > b)* ⇒ *Tập hợp là elip (E) có độ dài trục lớn 2a, trục nhỏ 2b.*

Bài 1. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x - 55 = 0$ và điểm $F_1(-3;0)$:

a) Tìm tập hợp các tâm M của đường tròn (C′) di động luôn đi qua F_1 và tiếp xúc với (C).

b) Viết phương trình của tập hợp trên.

Bài 2. Cho hai đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 4x - 32 = 0$ và (C′): $x^2 + y^2 - 4x = 0$:

a) Chứng minh (C) và (C′) tiếp xúc nhau.

b) Tìm tập hợp các tâm M của đường tròn (T) di động và tiếp xúc với hai đường tròn trên.

c) Viết phương trình của tập hợp đó.

Bài 3. Tìm tập hợp các điểm M có tỉ số các khoảng cách từ đó đến điểm F và đến đường thẳng Δ bằng *e*, với:

a) $F(3;0),\ \Delta: x - 12 = 0,\ e = \frac{1}{2}$ b) $F(2;0),\ \Delta: x - 8 = 0,\ e = \frac{1}{2}$

c) $F(-4;0),\ \Delta: 4x + 25 = 0,\ e = \frac{4}{5}$ d) $F(3;0),\ \Delta: 3x - 25 = 0,\ e = \frac{3}{5}$

Bài 4. Cho hai điểm A, B lần lượt chạy trên hai trục Ox và Oy sao cho AB = 12.

a) Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn AB.

b) Tìm tập hợp các điểm N chia đoạn AB theo tỉ số $k = -\frac{1}{2}$.

Bài 5.

a)

VẤN ĐỀ 5: Một số bài toán khác

Bài 1. Tìm tâm sai của (E) trong các trường hợp sau:

a) Mỗi đỉnh trên trục nhỏ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

b) Mỗi tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc vuông.

c) Mỗi tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc 60^0.

d) Độ dài trục lớn bằng *k* lần độ dài trục nhỏ (*k* > 1).

e) Khoảng cách từ một đỉnh trên trục lớn đến một đỉnh trên trục nhỏ bằng tiêu cự.

Bài 2. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Một góc vuông đỉnh O quay quanh O, có 2 cạnh cắt (E) lần lượt tại A và B.

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ không đổi.

b) Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng AB. Suy ra đường thẳng AB luôn tiếp xúc với một đường tròn (C) cố định. Tìm phương trình của (C).

HD: a) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ *b)* $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \Rightarrow OH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Bài 3. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Gọi F_1, F_2 là 2 tiêu điểm, A_1, A_2 là 2 đỉnh trên trục lớn, M là 1 điểm tuỳ ý thuộc (E).

a) Chứng minh: $MF_1.MF_2 + OM^2 = a^2 + b^2$.

b) Gọi P là hình chiếu của M trên trục lớn. Chứng minh: $\frac{MP^2}{A_1P.A_2P} = \frac{b^2}{a^2}$.

Bài 4.

a)

IV. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG HYPEBOL

1. Định nghĩa

Cho F_1, F_2 cố định với $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$.

$$\boxed{M \in (H) \Leftrightarrow |MF_1 - MF_2| = 2a} \qquad (a < c)$$

*F_1, F_2: các **tiêu điểm**, $F_1F_2 = 2c$: **tiêu cự**.*

2. Phương trình chính tắc của hypebol

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (a, b > 0,\ b^2 = c^2 - a^2)$$

- Toạ độ các tiêu điểm: $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$.
- Với M(x; y) ∈ (H), MF_1, MF_2 đgl các **bán kính qua tiêu điểm** của M.

$$\boxed{MF_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right|,\ MF_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|}$$

3. Hình dạng của hypebol

- (H) nhận các trục toạ độ làm các trục đối xứng và gốc toạ độ làm tâm đối xứng.
- Toạ độ các đỉnh: $A_1(-a;0),\ A_2(a;0)$
- Độ dài các trục: trục thực: $2a$, trục ảo: $2b$
- **Tâm sai** của (H): $e = \frac{c}{a}$ $(e > 1)$
- Hình chữ nhật cơ sở: tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a,\ y = \pm b$.
- Phương trình các đường tiệm cận: $y = \pm \frac{b}{a}x$.

4. Đường chuẩn của hypebol

- Phương trình các đường chuẩn Δ_i ứng với các tiêu điểm F_i là: $x \pm \frac{a}{e} = 0$
- Với M ∈ (H) ta có: $\boxed{\frac{MF_1}{d(M,\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M,\Delta_2)} = e}$ $(e < 1)$

VẤN ĐỀ 1: Xác định các yếu tố của (H)

Đưa phương trình của (H) về dạng chính tắc: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. *Xác định a, b, c.*

Các yếu tố:
- *Độ dài trục thực 2a, trục ảo 2b.*
- *Tiêu cự 2c.*
- *Toạ độ các tiêu điểm* $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$.
- *Toạ độ các đỉnh* $A_1(-a;0),\ A_2(a;0)$.
- *Tâm sai* $e = \frac{c}{a}$.
- *Phương trình các đường tiệm cận:* $y = \pm\frac{b}{a}x$
- *Phương trình các đường chuẩn* $x \pm \frac{a}{e} = 0$

Bài 21. Cho hypebol (H). Xác định độ dài các trục, tiêu cự, toạ độ các tiêu điểm, toạ độ các đỉnh, tâm sai, phương trình các đường tiệm cận, phương trình các đường chuẩn của (H), với (H) có phương trình:

a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ b) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ c) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ d) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$

e) $16x^2-25y^2=400$ f) $x^2-4y^2=1$ g) $4x^2-9y^2=5$ h) $9x^2-25y^2=1$

Bài 22.

a)

VẤN ĐỀ 2: Lập phương trình chính tắc của (H)

Để lập phương trình chính tắc của (H) ta cần xác định độ dài các nửa trục a, b của (H).

Chú ý: *Công thức xác định các yếu tố của (H):*

+ $b^2=c^2-a^2$ + $e=\frac{c}{a}$ + *Các tiêu điểm* $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$

+ *Các đỉnh:* $A_1(-a;0),\ A_2(a;0)$

Bài 4. Lập phương trình chính tắc của (H), biết:

a) Độ dài trục thực bằng 6, trục ảo bằng 4.

b) Độ dài trục thực bằng 8, tiêu cự bằng 10.

c) Tiêu cự bằng $2\sqrt{13}$, một tiệm cận là $y=\frac{2}{3}x$.

d) Độ dài trục thực bằng 48, tâm sai bằng $\frac{13}{12}$.

e) Độ dài trục ảo bằng 6, tâm sai bằng $\frac{5}{4}$.

Bài 5. Lập phương trình chính tắc của (H), biết:

a) Một đỉnh là A(5; 0), một tiêu điểm là F(6; 0).

b) Một tiêu điểm là F(–7; 0), tâm sai e = 2.

c) (H) đi qua hai điểm $M\left(2;\sqrt{6}\right),\ N(-3;4)$.

d) Độ dài trục thực bằng 8 và đi qua điểm A(5; –3).

e) Tiêu cự bằng 10 và đi qua điểm A(–4; 3).

f) Có cùng tiêu điểm với elip (E): $10x^2+36y^2-360=0$, tâm sai bằng $\frac{5}{3}$.

Bài 6. Lập phương trình chính tắc của (H), biết:

a) Một đỉnh là A(–3; 0) và một tiệm cận là d: $2x-3y=0$.

b) Hai tiệm cận là d: $2x\pm y=0$ và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

c) Tiêu cự bằng 8 và hai tiệm cận vuông góc với nhau.

d) Hai tiệm cận là d: $3x\pm 4y=0$ và hai đường chuẩn là Δ: $5x\pm 16=0$.

e) Đi qua điểm E(4; 6) và hai tiệm cận là d: $\sqrt{3}x\pm y=0$.

Bài 7.

a)

VẤN ĐỀ 3: Tìm điểm trên (H) thoả mãn điều kiện cho trước

Chú ý: • *Các công thức xác định độ dài bán kính qua tiêu điểm của điểm M(x; y) ∈ (H):*

$$\boxed{MF_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right|,\ MF_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|}$$

• *Nếu M thuộc nhánh phải thì $x \ge a$*

$$\Rightarrow MF_1 = \frac{c}{a}x + a,\ MF_2 = \frac{c}{a}x - a\ \ (MF_1 > MF_2)$$

• *Nếu M thuộc nhánh trái thì $x \le -a$*

$$\Rightarrow MF_1 = -\left(\frac{c}{a}x + a\right),\ MF_2 = -\left(\frac{c}{a}x - a\right)\ \ (MF_1 < MF_2)$$

Bài 6. Cho hypebol (H) và đường thẳng *d* vuông góc với trục thực tại tiêu điểm bên trái F_1 cắt (H) tại hai điểm M, N.

i) Tìm toạ độ các điểm M, N. ii) Tính MF_1, MF_2, MN.

a) $16x^2 - 9y^2 = 144$ b) $12x^2 - 4y^2 = 48$ c) $10x^2 + 36y^2 - 360 = 0$

Bài 7. Cho hypebol (H). Tìm những điểm M ∈ (H) sao cho:

i) $MF_2 = 3MF_1$ ii) $MF_1 = 3MF_2$ iii) $MF_1 = 2MF_2$ iv) $MF_1 = 4MF_2$

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ c) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ d) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

Bài 8. Cho hypebol (H). Tìm những điểm M ∈ (H) nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông, với:

a) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ d) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Bài 9. Cho hypebol (H). Tìm những điểm M ∈ (H) nhìn hai tiêu điểm dưới một góc α, với:

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1,\ \alpha = 120^0$ b) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{13} = 1,\ \alpha = 120^0$ c) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1,\ \alpha = 60^0$

Bài 10.

a)

VẤN ĐỀ 4: Tập hợp điểm

Để tìm tập hợp các điểm M(x; y) thoả điều kiện cho trước, ta đưa về một trong các dạng:

Dạng 1: $|MF_1 - MF_2| = 2a$ ⇒ *Tập hợp là hypebol (H) có hai tiêu điểm F_1, F_2, trục thực 2a.*

Dạng 2: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ⇒ *Tập hợp là hypebol (H) có độ dài trục thực 2a, trục ảo 2b.*

Bài 6. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 4x = 0$ và điểm $F_2(2;0)$.

a) Tìm toạ độ tâm F_1 và bán kính R của (C).

b) Tìm tập hợp các tâm M của đường tròn (C′) di động luôn đi qua F_2 và tiếp xúc với (C).

c) Viết phương trình của tập hợp trên.

Bài 7. Cho hai đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0$ và (C′): $x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0$.

a) Xác định tâm và tính bán kính của (C) và (C′).
b) Tìm tập hợp các tâm M của đường tròn (T) tiếp xúc với (C) và (C′).
c) Viết phương trình của tập hợp đó trên.

HD: *c) (H):* $x^2 - \frac{y^2}{24} = 1$.

Bài 8. Cho hai đường thẳng Δ: $5x - 2y = 0$ và Δ': $5x + 2y = 0$.

a) Tìm tập hợp (H) các điểm M có tích các khoảng cách từ M đến Δ và Δ' bằng $\frac{100}{29}$.

b) Viết phương trình các đường tiệm cận của (H).
c) Gọi N là một điểm bất kì trên (H). Chứng minh tích các khoảng cách từ N đến các đường tiệm cận của (H) bằng một số không đổi.

Bài 9. Tìm tập hợp các điểm M có tỉ số các khoảng cách từ đó đến điểm F và đến đường thẳng Δ bằng e, với:

a) $F(4;0),\ \Delta: x - 1 = 0,\ e = 2$

b) $F(3\sqrt{2};0),\ \Delta: x - \frac{3\sqrt{2}}{2},\ e = \frac{3\sqrt{2}}{3}$

c) $F(6;0),\ \Delta: 3x - 8 = 0,\ e = \frac{3}{2}$

d) $F(3;0),\ \Delta: 3x - 4 = 0,\ e = \frac{3}{2}$

Bài 10.
a)

VẤN ĐỀ 5: Một số bài toán khác

Bài 5. Cho hypebol (H): $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.
a) Viết phương trình các đường chuẩn của (H).
b) Viết phương trình các đường tiệm cận của (H).
c) Gọi M là một điểm bất kì trên (H). Chứng minh tích các khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng một số không đổi.

Bài 6. Cho hypebol (H): $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.
a) Tìm điểm M trên (H) sao cho bán kính qua tiêu điểm bên trái bằng 2 lần bán kính qua tiêu điểm bên phải của M.

b) Tìm điểm N trên (H) sao cho $F_1NF_2 = 90^0$.

c) Chứng minh rằng nếu một đường thẳng *d* cắt (H) tại P, Q và cắt hai đường tiệm cận tại P′, Q′ thì PP′ = QQ′.
HD: *c) Chứng tỏ hai đoạn PQ và P′Q′ có chung trung điểm.*

Bài 7. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

a) Gọi M là điểm tuỳ ý trên (H). Chứng minh tích các khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng một số không đổi.
b) Từ một điểm N bất kì trên (H), dựng hai đường thẳng song song với hai đường tiệm cận, cùng với hai đường tiệm cận tạo thành một hình bình hành. Tính diện tích hình bình hành đó.

HD: *a)* $\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$ *b)* $\frac{1}{2}ab$.

Bài 8.
a)

V. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG PARABOL

1. Định nghĩa

Cho điểm F và đường thẳng Δ không đi qua F.

$$M \in (P) \Leftrightarrow MF = d(M, \Delta)$$

F: **tiêu điểm**, Δ: **đường chuẩn**, $p = d(F, \Delta)$: **tham số tiêu**.

2. Phương trình chính tắc của parabol

$$\boxed{y^2 = 2px} \qquad (p > 0)$$

- Toạ độ tiêu điểm: $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.
- Phương trình đường chuẩn: Δ: $x + \frac{p}{2} = 0$.
- Với M(*x; y*) ∈ (P), **bán kính qua tiêu điểm** của M là $MF = x + \frac{p}{2}$.

3. Hình dạng của parabol

- (P) nằm về phía bên phải của trục tung.
- (P) nhận trục hoành làm trục đối xứng.
- Toạ độ đỉnh: $O(0;0)$
- Tâm sai: e = 1.

VẤN ĐỀ 1: Xác định các yếu tố của (P)

Đưa phương trình của (P) về dạng chính tắc: $y^2 = 2px$. *Xác định tham số tiêu p.*

Các yếu tố: – *Toạ độ tiêu điểm* $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

– *Phương trình đường chuẩn* Δ: $x + \frac{p}{2} = 0$.

Bài 23. Cho parabol (P). Xác định toạ độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của (P), với:

a) $(P): y^2 = 6x$ b) $(P): y^2 = 2x$ c) $(P): y^2 = 16x$ d) $(P): y^2 = x$

Bài 24.

a)

VẤN ĐỀ 2: Lập phương trình chính tắc của (P)

*Để lập phương trình chính tắc của (P) ta cần xác định **tham số tiêu p** của (P).*

***Chú ý:** Công thức xác định các yếu tố của (P):*

– *Toạ độ tiêu điểm* $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ – *Phương trình đường chuẩn* Δ: $x + \frac{p}{2} = 0$.

Bài 8. Lập phương trình chính tắc của (P), biết:

a) Tiêu điểm F(4; 0) b) Tiêu điểm F(3; 0) c) Đi qua điểm M(1; –4)

c) Đường chuẩn Δ: $x + 2 = 0$ d) Đường chuẩn Δ: $x + 3 = 0$ e) Đi qua điểm M(1; –2)

Bài 9. Lập phương trình chính tắc của (P), biết:

a) Tiêu điểm F trùng với tiêu điểm bên phải của elip (E): $5x^2 + 9y^2 = 45$.

b) Tiêu điểm F trùng với tiêu điểm bên phải của hypebol (H): $16x^2 - 9y^2 = 144$.

c) Tiêu điểm F trùng với tâm của đường tròn (C): $x^2 - 6x + y^2 + 5 = 0$.

Bài 10.

a)

VẤN ĐỀ 3: Tìm điểm trên (P) thoả mãn điều kiện cho trước

Chú ý: *Công thức xác định độ dài bán kính qua tiêu điểm của điểm M(x; y) ∈ (P):*

$$MF = x + \frac{p}{2}$$

Bài 11. Cho parabol (P) và đường thẳng *d* vuông góc với trục đối xứng tại tiêu điểm F cắt (P) tại hai điểm M, N.

i) Tìm toạ độ các điểm M, N. ii) Tính MF, MN.

a) $(P): y^2 = 6x$ b) $(P): y^2 = 2x$ c) $(P): y^2 = 16x$ d) $(P): y^2 = x$

Bài 12. Cho parabol (P).

i) Tìm những điểm M ∈ (P) cách tiêu điểm F một đoạn bằng *k*.

ii) Chọn M có tung độ dương. Tìm điểm A ∈ (P) sao cho ΔAFM vuông tại F.

a) $(P): y^2 = 8x,\ k = 10$ b) $(P): y^2 = 2x,\ k = 5$ c) $(P): y^2 = 16x,\ k = 4$

Bài 13. Cho parabol (P) và đường thẳng *d* có hệ số góc *m* quay quanh tiêu điểm F của (P) cắt (P) tại hai điểm M, N.

i) Chứng minh $x_M.x_N$ không đổi.

ii) Tính MF, NF, MN theo *m*.

a) $(P): y^2 = 4x$ b) $(P): y^2 = 2x$ c) $(P): y^2 = 16x$ d) $(P): y^2 = x$

Bài 14.

a)

VẤN ĐỀ 4: Tập hợp điểm

Để tìm tập hợp các điểm M(x; y) thoả điều kiện cho trước, ta đưa về một trong các dạng:

Dạng 1: $MF = d(M, \Delta)$ ⇒ *Tập hợp là (P) có tiêu điểm F.*

Dạng 2: $y^2 = 2px$ ⇒ *Tập hợp là (P) có tiêu điểm* $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

Bài 11. Tìm tập hợp các tâm M của đường tròn (C) di động luôn đi qua điểm F và tiếp xúc với đường thẳng *Δ*, với:

a) $F(2;0),\ \Delta: x + 2 = 0$ b) $F(3;0),\ \Delta: x + 3 = 0$ c) $F(1;0),\ \Delta: x + 1 = 0$

Bài 12. Cho parabol (P). Đường thẳng *d* quay quanh O cắt (P) tại điểm thứ hai là A. Tìm tập hợp của:

i) Trung điểm M của đoạn OA ii) Điểm N sao cho $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NO} = \vec{0}$.

a) $y^2 = 16x$ b) $y^2 = 4x$ c) $y^2 = 2x$ d) $y^2 = x$

Bài 13.

a)

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

Bài 25. Cho ba điểm A(2; 1), B(–2; 2), M(*x; y*).

a) Tìm hệ thức giữa *x* và *y* sao cho tam giác AMB vuông tại M.

b) Tìm phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường trung trực đoạn AB.

c) Tìm phương trình của đường thẳng *d* đi qua A và tạo với AB một góc 60^0.

HD: a) $x^2+y^2-3y-2=0$ *b)* $8x-2y+3=0$

c) $\left(4\sqrt{3}\mp 1\right)x-\left(\sqrt{3}\pm 4\right)y\pm 6-7\sqrt{3}=0$

Bài 26. Cho ba đường thẳng $d_1: 3x+4y-12=0$, $d_2: 3x+4y-2=0$, $d_3: x-2y+1=0$.

a) Chứng tỏ rằng d_1 và d_2 song song. Tính khoảng cách giữa d_1 và d_2.

b) Tìm phương trình đường thẳng *d* song song và cách đều d_1 và d_2.

c) Tìm điểm M trên d_3 cách d_1 một đoạn bằng 1.

HD: a) 2 *b)* $3x+4y-7=0$ *c) M(3; 2) hoặc M(1; 1)*

Bài 27. Cho điểm A(2; –3) và hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=7-2m \\ y=-3+m \end{cases}$, $d': \begin{cases} x=-5+4t \\ y=-7+3t \end{cases}$.

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua A và cắt *d, d′* tại B, B′ sao cho AB = AB′.

b) Gọi M là giao điểm của *d* và *d′*. Tính diện tích của tam giác MBB′.

HD: a) $\Delta: \begin{cases} x=2+6t \\ y=-3+2t \end{cases}$ *b) S = 5*

Bài 28. Cho đường thẳng d_m: $(m-2)x+(m-1)y+2m-1=0$.

a) Chứng minh rằng d_m luôn đi qua một điểm cố định A.

b) Tìm *m* để d_m cắt đoạn BC với B(2; 3), C(4; 0).

c) Tìm phương trình đường thẳng đi qua A và tạo với BC một góc 45^0.

d) Tìm *m* để đường thẳng d_m tiếp xúc với đường tròn tâm O bán kính R = $\sqrt{5}$.

HD: a) A(1; –3) *b)* $\frac{8}{7}\le m\le \frac{3}{2}$ *c)* $x+5y+14=0,\ 5x-y-8=0$

d) $m=3,\ m=\frac{4}{3}$

Bài 29. Cho hai đường thẳng:

$$d: x\cos t+y\sin t-3\cos t-2\sin t=0 \text{ và } d': x\sin t-y\cos t+4\cos t+\sin t=0$$

a) Chứng minh rằng *d* và *d′* lần lượt đi qua 2 điểm cố định A, A′ và *d* ⊥ *d′*.

b) Tìm phương trình tập hợp giao điểm M của *d* và *d′*. Viết phương trình tiếp tuyến của tập hợp đó vẽ từ điểm B(5; 0).

HD: a) A(3; 2), A′(–1; 4) *b) (C):* $(x-1)^2+(y-3)^2=5$

$2x+11y-10=0,\ 2x+y-10=0$

Bài 30. Cho ba điểm M(6; 1), N(7; 3), P(3; 5) lần lượt là trung điểm của ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC.

a) Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C.

b) Tìm phương trình các trung tuyến AM, BN, CP.

c) Tính diện tích của tam giác ABC.

HD: a) A(4; 7), B(2; 3), C(10; –1)

b) $3x+y-19=0,\ y=3,\ 6x+7y-53=0$ *c) S = 20*

Bài 31. Cho tam giác ABC có A(8; 0), B(0; 6), C(9; 3). Gọi H là chân đường cao vẽ từ C xuống cạnh AB.

a) Tìm phương trình cạnh AB và đường cao CH.

b) Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của C trên Ox và Oy. Chứng minh I, H, K thẳng hàng.

Bài 32. Cho ba điểm A(0; –1), B(4; 1), C(4; 2). Viết phương trình đường thẳng *d* khi biết:

a) *d* đi qua A và khoảng cách từ B đến *d* bằng hai lần khoảng cách từ C đến *d*.

b) *d* đi qua C và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại E và F sao cho: $\overline{OE}+\overline{OF}=-3$.

c) *d* đi qua B, cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại M, N với $x_M>0,\ y_N>0$ và sao cho:

i) OM + ON nhỏ nhất ii) $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}$ nhỏ nhất.

HD: a) $x-y-1=0,\ 2x-3y-3=0$ *b)* $2x-y-6=0,\ x-4y+4=0$

c) i) $x+2y-6=0$ *ii)* $4x+y-17=0$

Bài 33. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC, biết:

a) Đỉnh B(2; 6), phương trình một đường cao và một phân giác vẽ từ một đỉnh là:

$$x-7y+15=0,\ 7x+y+5=0$$

b) Đỉnh A(3; –1), phương trình một phân giác và một trung tuyến vẽ từ hai đỉnh khác nhau là: $x-4y+10=0,\ 6x+10y-59=0$.

HD: a) $4x-3y+10=0,\ 7x+y-20=0,\ 3x+4y-5=0$

b) $2x+9y-65=0,\ 6x-7y-25=0,\ 18x+13y-41=0$

Bài 34. Cho hai điểm A(3; 4), B(–1; –4) và đường thẳng $d: 3x+2y-7=0$.

a) Viết phương trình đường tròn (C) qua A, B và có tâm I ∈ *d*.

b) Viết phương tiếp tuyến của (C) kẻ từ điểm $E\left(\frac{1}{2};4\right)$. Tính độ dài của tiếp tuyến đó và tìm toạ độ tiếp điểm.

c) Trên (C), lấy điểm F có $x_F=8$. Viết phương trình đường tròn (C′) đối xứng với (C) qua đường thẳng AF.

HD: a) $x^2+y^2-6x+2y-15=0$

b) $y-4=0,\ 4x-3y+10=0$, $d=\frac{5}{2}$, *tiếp điểm (3; 4), (–1; 2)*

c) (C′): $x^2+y^2-16x-8y+55=0$

Bài 35. Cho đường cong (C_m): $x^2+y^2+mx-4y-m+2=0$.

a) Chứng minh rằng với mọi *m*, (C_m) luôn là đường tròn và (C_m) luôn đi qua 2 điểm cố định A, B.

b) Tìm *m* để (C_m) đi qua gốc toạ độ O. Gọi (C) là đường tròn ứng với giá trị *m* vừa tìm được. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: 4x+3y-5=0$ và chắn trên (C) một dây cung có độ dài bằng 4.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) có vectơ chỉ phương là $\vec{a}=(-2;1)$.

d) Tìm *m* để (C_m) tiếp xúc với trục tung. Viết phương trình đường tròn ứng với *m* đó.

HD: a) A(1; 1), B(1; 3)

b) m = 2, (C): $x^2+y^2+2x-4y=0$, $\Delta_1: 4x+3y-8=0,\ \Delta_2: 4x+3y+7=0$

c) $x+2y-8=0,\ x+2y+2=0$ *d) m = –2,* $x^2+y^2-2x-4y+4=0$

Bài 36. Cho đường cong (C_t): $x^2+y^2-2x\cos t-2y\sin t+\cos 2t=0$ ($0<t<\pi$).

a) Chứng tỏ (C_t) là đường tròn với mọi *t*.

b) Tìm tập hợp tâm I của (C_t) khi *t* thay đổi.

c) Gọi (C) là đường tròn trong họ (C_t) có bán kính lớn nhất. Viết phương trình của (C).

d) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tạo với trục Ox một góc 45^0.

HD: b) $x^2+y^2=1$ *c)* $t=\frac{\pi}{2}$, $(C): x^2+y^2-2y-1=0$

d) $x-y-1=0,\ x+y+1=0,\ x-y+3=0,\ x+y-3=0$

Bài 37. Cho hai đường thẳng $d_1: x-3y+4=0,\ d_2: 3x+y+2=0$.

a) Viết phương trình hai đường tròn (C_1), (C_2) qua gốc toạ độ O và tiếp xúc với d_1, d_2. Xác định tâm và bán kính của 2 đường tròn đó. Gọi (C_1) là đường tròn có bán kính lớn hơn.

b) Gọi A và B là tiếp điểm của (C_1) với d_1 và d_2. Tính toạ độ của A và B. Tính góc $\widehat{AOB}$.

c) Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C_1) tạo ra 1 dây cung nhận điểm E(4; –2) làm trung điểm.

d) Trên đường thẳng $d_3: 3x+y-18=0$, tìm những điểm mà từ đó vẽ được 2 tiếp tuyến của (C_1) vuông góc với nhau.

HD: a) $(C_1): x^2+y^2-6x+2y=0,\ (C_2): 5x^2+5y^2+2x-6y=0$

b) A(2; 2), B(0; –2), $\widehat{AOB}=135^0$ *c) Δ:* $x-y-6=0$ *d) (5; 3), (7; –3)*

Bài 38. Cho đường tròn (C) đi qua điểm A(1; –1) và tiếp xúc với đường thẳng Δ: $x+2=0$ tại điểm B có $y_B=2$.

a) Viết phương trình đường tròn (C).

b) Một đường thẳng *d* đi qua M(4; 0) và có hệ số góc *k*. Biện luận theo *k* số giao điểm của *d* và (C).

HD: a) $x^2+y^2-2x-4y-4=0$

b) $k<\frac{5}{12}$ *: 2 điểm chung,* $k=\frac{5}{12}$ *: 1 điểm chung,* $k>\frac{5}{12}$ *: không điểm chung*

Bài 39. Cho 4 số thực *a, b, c, d* thoả điều kiện: $\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ c+d=3 \end{cases}$. Bằng phương pháp hình học, chứng minh rằng: $ac+cd+bd \le \frac{9+6\sqrt{2}}{4}$.

HD: Xét đường tròn (C): $x^2+y^2=1$ *và đường thẳng* $d: x+y=3$. *Gọi M(a; b) ∈ (C), N(c; d) ∈ d.Gọi A, B là các giao điểm của (C) và d với đường thẳng y = x .*

$\Rightarrow A\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ B\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. *Tính* $MN^2=10-2(ac+cd+bd)$, $AB^2=\frac{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}{2}$.

Từ $MN \ge AB$ *ta suy ra đpcm.*

Bài 40. Cho elip (E): $4x^2+9y^2-36=0$.

a) Xác định độ dài các trục, tiêu cự, tâm sai, toạ độ các tiêu điểm, toạ độ các đỉnh của (E).

b) Tính diện tích hình vuông có các đỉnh là giao điểm của (E) với 2 đường phân giác các góc toạ độ.

HD: b) $S=\frac{144}{13}$.

Bài 41. Cho elip (E): $16x^2+25y^2-400=0$.

a) Xác định độ dài các trục, tiêu cự, tâm sai, toạ độ các tiêu điểm, toạ độ các đỉnh của (E).

b) Viết phương trình các đường phân giác của góc F_1MF_2 với $M\left(3;-\frac{16}{3}\right)$ và F_1, F_2 là các tiêu điểm của (E).

HD: b) $3x-5y-25=0,\ 5x+3y-\frac{27}{5}=0$

Bài 42. Cho elip (E): $x^2+4y^2-20=0$ và điểm A(0; 5).

a) Biện luận số giao điểm của (E) với đường thẳng *d* đi qua A và có hệ số góc *k*.

b) Khi *d* cắt (E) tại M, N, tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn MN.

HD: a) $\left[\begin{array}{l} k < -\frac{1}{4} \\ k > \frac{1}{4} \end{array}\right.$ *: 2 giao điểm,* $-\frac{1}{4} < k < \frac{1}{4}$ *: không giao điểm,* $k = \pm\frac{1}{4}$ *: 1 giao điểm*

b) $x^2 + 4y^2 = 100$

Bài 43. Cho họ đường cong (C_m): $x^2 + y^2 - 2mx + 2m^2 - 1 = 0$ (*).

a) Tìm các giá trị của *m* để (C_m) là đường tròn.

b) Tìm phương trình tập hợp (E) các điểm M trong mặt phẳng O*xy* sao cho ứng với mỗi điểm M ta có duy nhất 1 đường tròn thuộc họ (C_m) đi qua điểm M đó.

HD: a) $-1 \le m \le 1$ *b) (E):* $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ *(Đưa PT (*) về PT với ẩn m. Tìm điều kiện để PT có nghiệm m duy nhất).*

Bài 44. Cho elip (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

a) Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) có 2 đỉnh là 2 tiêu điểm của (E) và 2 tiêu điểm là 2 đỉnh của (E).

b) Tìm điểm M trên (H) sao cho 2 bán kính qua tiêu điểm của M vuông góc với nhau.

c) Chứng minh tích các khoảng cách từ một điểm N bất kì trên (H) đến hai đường tiệm cận của (H) bằng một hằng số.

HD: a) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$ *b) 4 điểm* $M\left(\pm\frac{5\sqrt{7}}{4}; \pm\frac{9}{4}\right)$ *c)* $\frac{63}{16}$.

Bài 45. Cho hypebol (H): $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$.

a) Xác định độ dài các trục, tiêu cự, tâm sai, toạ độ các tiêu điểm, toạ độ các đỉnh của (H).

b) Gọi *d* là đường thẳng đi qua điểm A(1; 4) và có hệ số góc *k*. Biện luận theo *k* số giao điểm của *d* và (H).

Bài 46. Cho các điểm $A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$ và điểm M(*x; y*). Gọi M′ là điểm đối xứng của M qua trục tung.

a) Tìm toạ độ của điểm M′ theo *x, y* . Tìm phương trình tập hợp (H) các điểm M thoả $\overrightarrow{MA_2}.\overrightarrow{M'A_2} = 0$. Chứng tỏ (H) là một hypebol. Xác định toạ độ các tiêu điểm và phương trình các đường tiệm cận của (H).

b) Viết phương trình của elip (E) có 2 đỉnh trên trục lớn của (E) trùng với 2 đỉnh của (H) và (E) đi qua điểm $B\left(\frac{2}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

c) Tìm toạ độ giao điểm của (H) với 2 đường chuẩn của (E).

HD: a) $x^2 - y^2 = 4$ *b) (E):* $x^2 + 4y^2 = 4$ *c) 4 điểm* $\left(\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}; \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

Bài 47. Cho hypebol (H): $4x^2 - 5y^2 - 20 = 0$.

a) Tìm tiêu điểm, tâm sai, tiệm cận của (H).

b) Gọi (C) là đường tròn có tâm trùng với tiêu điểm F_1 (có hoành độ âm) của (H) và bán kính R bằng độ dài trục thực của (H). M là tâm đường tròn đi qua tiêu điểm F_2 và tiếp xúc ngoài với (C). Chứng minh rằng M ở trên (H).

HD: b) (C): $(x+3)^2 + y^2 = 20$. *Kiểm chứng* $MF_1 - MF_2 = 2\sqrt{5} = 2a \Rightarrow M \in (H)$.

Bài 48. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

a) Viết phương trình của elip (E) có cùng tiêu điểm với (H) và đi qua điểm $P\left(2;\frac{5}{3}\right)$.

b) Đường thẳng *d* đi qua đỉnh A_2 của (E) (có hoành độ dương) và song song với đường thẳng Δ: $2x-3y+12=0$. Viết phương trình của *d*. Tìm toạ độ giao điểm B (khác A_2) của *d* với (E). Xác định điểm C ∈ (E) sao cho tam giác A_2BC có diện tích lớn nhất.

HD: a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ *b) d:* $2x-3y-6=0$, $B\left(-\frac{1}{3};-\frac{20}{9}\right)$, $C\left(-2;\frac{5}{3}\right)$

Bài 49. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Gọi F_1, F_2 là 2 tiêu điểm và A_1, A_2 là 2 đỉnh của (H). Trên (H), lấy điểm M tuỳ ý, kẻ MP ⊥ O*x*. Chứng minh:

a) $(MF_1+MF_2)^2 = 4(OM^2+b^2)$ b) $\frac{PM^2}{\overline{A_1P}.\overline{A_2P}} = \frac{b^2}{a^2}$.

HD: a) Viết $(MF_1+MF_2)^2 = (MF_1-MF_2)^2+4MF_1.MF_2$.

b) Tính PM^2, $\overline{A_1P}.\overline{A_2P}$ *theo toạ độ điểm M.*

Bài 50. Cho parabol (P): $y^2 = 4x$.

a) Tìm toạ độ tiêu điểm F và phương trình đường chuẩn Δ của (P).
b) Tìm điểm M trên (P) mà khoảng cách từ M đến F bằng 5.
HD: b) N(4; 4); N(4; –4)

Bài 51. Cho parabol (P): $y^2 = 2x$ có tiêu điểm F và điểm $M\left(\frac{t^2}{2};t\right)$ (với $t \neq 0$).

a) Chứng tỏ rằng M nằm trên (P).
b) Đường thẳng FM cắt (P) tại N (khác M). Tìm toạ độ trung điểm I của đoạn MN theo *t*.
c) Tìm tập hợp (P′) các điểm I khi *t* thay đổi.

HD: b) $I\left(\frac{t^4+1}{4t^2};\frac{t^2-1}{2t}\right)$ *c) (P′):* $y^2 = x-\frac{1}{2}$

Bài 52. Cho parabol (P): $y^2 = 2px$ ($p > 0$). Một đường thẳng *d* đi qua tiêu điểm F cắt (P) tại M và N. Gọi *t* là góc của trục O*x* và $\overrightarrow{FM}$.

a) Chứng minh rằng khi *d* di động quay quanh F thì tổng $\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}$ không đổi.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của tích FM.FN. Suy ra vị trí của *d*.

HD: a) $FM = \frac{p}{1-\cos t}$, $FN = \frac{p}{1+\cos t}$ $\Rightarrow \frac{1}{FM}+\frac{1}{FN} = \frac{2}{p}$

b) Áp dụng BĐT Cô–si: $\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN} \geq 2\sqrt{\frac{1}{FM}.\frac{1}{FN}}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{p} \geq 2\sqrt{\frac{1}{FM.FN}} \Leftrightarrow FM.FN \geq p^2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{FM} = \frac{1}{FN} \Leftrightarrow \cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow d \perp Ox$.