Sáng kiến kinh nghiệm
Đổi mới phương pháp giảng dạy Toán học lớp 7

I. Lý do chọn đề tài:

Toán học là một môn khoa học suy diễn. Các kết luận Toán học đều được chứng minh một cách chặt chẽ. Nhưng trong quá trình hình thành, trước khi có những kết luận mang tính tổng quát, toán học cũng đã phải tiến hành xét các trường hợp cụ thể, riêng biệt. Ta phải đối chiếu các quan sát được, suy ra các điều tương tự, phải thử đi thử lại, ... để từ đó dự đoán về một định lý toán học, trước khi chứng minh chúng. Bên cạnh đó, ta phải dự đoán ra ý của phép chứng minh trước khi đi vào chứng minh chi tiết.

Hiện nay, chúng ta đang tiến hành đổi mới giáo dục. Để công cuộc đổi mới thành công thì phải gắn chặt việc đổi mới nội dung chương trình – SGK với việc đổi mới phương pháp giảng dạy. Một trong các xu hướng đổi mới phương pháp giảng dạy môn Toán hiện nay là dạy cho học sinh biết dự đoán, dạy cho học sinh biết suy luận có lý.

Thực tế là các sách giáo khoa Toán bậc THCS hiện nay, cấu trúc một bài học thường là:

Phần 1. Xét các các trường hợp cụ thể: tính toán, đo đạc, so sánh, … trên các đối tượng khác nhau.

Phần 2. Dự đoán kết luận khái quát: nêu ra một mệnh đề tổng quát.

Phần 3. Chứng minh (hoặc công nhận) mệnh đề tổng quát, tuỳ đối tượng và trình độ học sinh.

Phần 4. Các ví dụ và bài tập vận dụng.

Như thế học sinh được quan sát, thử nghiệm, dự đoán rồi bằng suy luận để đi đến kiến thức mới, sau đó vận dụng kiến thức mới vào các tình huống khác nhau.

Chúng ta xét một số bài học cụ thể sau:

Mục 4 (trang 13 SGK Toán 7 tập I).Giá tị tuyệt đối của một số…

Sau khi đưa ra định nghĩa về giá trị tuyệt đối của một số, SGK đưa ra bài tập ?1 điền vào chỗ trống. Để từ đó phân tích, nhận xét, đưa ra kết quả tổng quát:

$$|x| = \begin{cases} x; khi x \ge 0 \\ -x; khi x < 0 \end{cases}$$

Kết quả này được công nhận, không chứng minh.

Sau đó là các bài tập vận dụng.

Mục 1 (trang 106 SGK Toán 7 tập I).Tổng ba góc của một tam giác.

SGK yêu cầu học sinh vẽ hai tam giác bất kỳ, đo và tính tổng ba góc trong của mỗi tam giác rồi nêu nhận xét. Từ đó đưa ra dự đoán về tổng ba góc trong một tam giác . Sau đó chứng minh dự đoán này.

Tiếp theo là các bài tập vận dụng.

Mục 2. (trang 8 SGK Toán 9 tập I).Căn bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$.

Để dẫn đến định lý: Với mọi số a ta cố: $\sqrt{a^2} = |a|$, SGK yêu cầu học sinh điền số thích hợp vào bảng:

a	-2	-1	0	2	3
a^2					
$\sqrt{a^2}$					

Từ đó nhận xét, khái quát hoá để đưa ra định lý.

Sau khi phát biểu định lý, SGK chứng minh định lý bằng suy luận chặt chẽ.

Sau đó là các bài tập vận dụng.

Bên cạnh đó, trong nội dung ôn luyện Toán cho học sinh giỏi, một trong những chuyên đề không thể thiếu được là chuyên đề: “Phương pháp quy nạp Toán học”. Bởi vì, thông qua việc giảng dạy chuyên đề này, người thầy dạy Toán đã:

1) Cung cấp cho học sinh một hướng suy nghĩ trong việc tìm tòi lời giải các bài toán;

2) Giúp học sinh giải được một lớp các bài toán Số học, Đại số và Hình học thuộc đủ các dạng bài toán: chia hết, chứng minh đồng nhất thức, chứng minh bất đẳng thức, ... mà trong đó có liên quan đến tập hợp các số tự nhiên;

3) Đồng thời qua việc nghiên cứu các mệnh đề toán học bao hàm một số vô hạn các trường hợp riêng, mà việc chứng minh chúng chỉ cần xét một số hữu hạn các trường hợp theo một lôgic chặt chẽ và chính xác, đã mở rộng tư duy lôgic cho các em học sinh, giúp các em say mê, hứng thú học Toán hơn.

II. Mục đích của đề tài:

Qua nhiều năm trực tiếp giảng dạy, bồi dưỡng học sinh giỏi các cấp và bồi dưỡng giáo viên thay sách, tập hợp các bài giảng lại tôi viết chuyên đề này nhằm mục đích:

1) Cung cấp một số kiến thức cơ bản về phép quy nạp, phép quy nạp hoàn toàn, quy nạp không hoàn toàn, và nguyên lý quy nạp toán học.

2) Giúp học sinh có thêm một số phương pháp mới để giải một số bài toán Toán học khác nhau.

3) Cung cấp thêm một số bài tập hấp dẫn và nhiều vẻ, qua đó củng cố và mở rộng thêm các kiến thức đã học.

4) Rèn luyện tư duy, phát huy tính sáng tạo và gây hứng thú học toán cho học sinh.

III. Nội dung đề tài:

Nội dung của đề tài này bao gồm:

Phần I. Một số cơ sở lý luận.

Phần II. Vận dụng vào Dạy & Học toán ở trường phổ thông.

A. Vận dụng phép quy nạp hoàn toàn trong chứng minh một mệnh đề toán học

B. Vận dụng phương pháp quy nạp toán học để giải toán

1. Phát hiện quy luật và chứng minh quy luật đó.
2. Vận dụng vào giải toán chia hết.
3. Vận dụng vào cứng minh đồng nhất thức.
4. Vận dụng vào chứng minh bất đẳng thức.
5. Vận dụng vào các bài toán hình học.

C. Có thể có cách giải khác?

D. Bổ sung: Một số dạng nguyên lý quy nạp Toán học.

Phần III. Hiệu quả của đề tài

Phần IV. Kết luận - đánh giá khái quát.

Với lý do, mục đích và nội dung như trên mong rằng chuyên đề được đông đảo các đồng chí giáo viên và các em học sinh tham khảo và góp ý kiến xây dựng.

Phần I. Cơ sở lý luận

1. Quy nạp hoàn toàn và không hoàn toàn:

1.1 Danh từ "quy nạp" theo nghĩa đầu tiên của nó được dùng để chỉ các quy luật nhờ đó mà thu được các kết luận tổng quát, dựa vào một loạt các khẳng định riêng biệt.

Quy nạp hoàn toàn là một mệnh đề tổng quát được chứng minh theo từng trường hợp của một số hữu hạn các trường hợp có thể có.

Ví dụ 1.: Chúng ta xác lập rằng :

" Mỗi số chẵn n trong khoảng $[4;100]$ đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của 2 số nguyên tố ".

Muốn vậy chúng ta phân tích:

4 = 2+2

6 = 3+3

8 = 5+3

10 = 7+3

12 = 7+5

......

......

98 = 93+5

100 = 97+3

Sau khi thử 49 trường hợp, từ 49 đẳng thức này chứng tỏ rằng, thực tế mỗi số chẵn trong khoảng xét được biểu diễn dưới dạng tổng của 2 số nguyên tố.

1.2 Quy nạp không hoàn toàn:

Trong trường hợp kết luận tổng quát rút ra không dựa trên sự kiểm tra tất cả các trường hợp có thể xảy ra mà chỉ trên cơ sở một số đủ lớn các trường hợp thì ta có quy nạp không hoàn toàn.

Quy nạp không hoàn toàn được vận dụng nhiều trong các khoa học thực nghiệm. Chẳng hạn bằng cách đó người ta đã thiết lập nên định luật cơ bản bảo toàn khối lượng:

định luật này được Lômônôxôp phát biểu và chỉ được thừa nhận khi Lavoadiê đã kiểm tra sự đúng đắn của nó với độ chính xác đủ lớn và trong các điều kiện đủ khác nhau.

Trong toán học, quy nạp không hoàn toàn không được xem là một phương pháp chứng minh chặt chẽ, do đó nó chỉ được áp dụng rất hạn chế. Bởi vì một mệnh đề toán học bao hàm một số vô hạn các trường hợp riêng, nhưng con người ta không thể tiến hành kiểm tra một số vô hạn các trường hợp được.Chẳng hạn

sau khi có kết quả đúng với 49 trường hợp như ở ví dụ 1, ta chưa thể đưa ra kết luận rằng, mọi số tự nhiên chẵn đều có thể phân tích được thành tổng của hai số nguyên tố.

Đương nhiên, quy nạp không hoàn toàn là một phương pháp "gợi mở" rất hiệu lực để tìm ra chân lý mới. Chúng ta hãy tham khảo một vài ví dụ.

Ví dụ 2. Xét tổng n số tự nhiên lẻ liên tiếp đầu tiên.

Chúng ta hãy xét các trường hợp riêng biệt:

+ với n=1 : 1=1 mà $1 = 1^2$

+ với n=2 : 1+3=4 mà $4 = 2^2$

+ với n=3 : 1+3+5=9 mà $9 = 3^2$

+ với n=4 : 1+3+5+7=16 mà $16 = 4^2$

+ với n=5 : 1+3+5+7+9=25 mà $25 = 5^2$

Sau khi xét một số trường hợp riêng này, ta nảy ra kết luận tổng quát :

$$1+3+5+7+9+...+(2n-1) = n^2 \quad (1)$$

tức là : " tổng của n số lẻ liên tiếp đầu tiên bằng n^2 ".

Việc chứng minh kết luận này một cách chặt chẽ (xem ví dụ 7) đã chứng tỏ kết luận này là đúng.

Ví dụ 3: Tính tổng lập phương các số tự nhiên liên tiếp đầu tiên:

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$$

Ta xét các trường hợp riêng biệt:

$S_1 = 1^3 = 1 \qquad = 1^2$

$S_2 = 1^3 + 2^3 = 9 \qquad = (1+2)^2$

$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \qquad = (1+2+3)^2$

$S_4 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \qquad = (1+2+3+4)^2$

Do đó có thể nảy ra kết luận tổng quát :

$S_n = (1+2+3+...+n)^2 \qquad (2)$

Tất nhiên, điều nhận xét trên không phải là sự chứng minh sự đúng đắn của các công thức (1) hay (2). ở phần sau, chúng ta sẽ làm quen với một phương pháp giúp chúng ta chứng minh được các công thức (1) và (2) là đúng.

Chúng ta cũng cần chú ý rằng, suy luận bằng quy nạp đôi khi dẫn đến kết luận sai, như các ví dụ sau:

<u>Ví dụ 4</u>: Khi nghiên cứu hiệu của một số có 2 chữ số trở lên với số có cùng các chữ số như thế nhưng viết theo thứ tự ngược lại. Trong trường hợp các số có 2 chữ số, 3 chữ số ta thấy kết luận là các hiệu đó chia hết cho 9 và 99. Cụ thể là:

$\overline{ab} - \overline{ba} \vdots 9$

$\overline{abc} - \overline{cba} \vdots 99$

Nảy ra kết luận quy nạp là:

$\overline{abcd} - \overline{dcba} \vdots 999$

Kết luận này sai vì chẳng hạn ta có:

2231-1322 = 909 không chia hết 999

<u>Ví dụ 5</u>: Khi xét các số có dạng $2^{2^n} + 1$ nhà toán học Fecma nhận xét rằng với n = 1; 2; 3 hoặc 4 thì thu được các số nguyên tố. Từ đó ông đưa ra giả thiết rằng tất cả các số có dạng như thế (với $n \in N^*$) là số nguyên tố. Nhưng ơle đã chỉ ra rằng với n = 5 ta được số $2^{32} + 1$ không phải là số nguyên tố vì số đó chia hết cho 641. Điều đó có nghĩa là kết luận của nhà toán học Fecma là sai lầm.

<u>Ví dụ 6</u>. Xét số $S_n = n^2 + n + 17$ với $n \in N^*$ với các trường hợp n = 1, 2, 3; ...; 15 thì ta thấy S_n là số nguyên tố.

Từ đó có thể kết luận là S_n là số nguyên tố với mọi số $n \in N^*$ hay không?

Với n =16 thì ta được số $S_{16} = 16^2 + 16 + 17 = 17^2$ do đó S_{16} không phải là số nguyên tố, tức là kết luận quy nạp S_n là số nguyên tố với mọi số $n \in N^*$ là sai.

2. Phương pháp quy nạp toán học.

2.1 Như vậy, quy nạp không hoàn toàn là một trong những con đường để dẫn đến phát minh: người ta nghiên cứu một số hữu hạn các trường hợp riêng để tìm ra quy luật tổng quát. Thế nhưng, như ta đã biết, quy nạp không hoàn toàn thường dẫn đến các kết quả sai.

Vậy làm thế nào để biết được quy luật tổng quát mà ta đưa ra là đúng đắn, chẳng lẽ ta lại cứ thử tiếp, thử tiếp cho đến khi nào gặp một trường hợp riêng mà kết luận đó không đúng (như ở ví dụ 6: thử đến lần thứ 16). Và lấy gì để đảm bảo rằng số lần thử là hữu hạn.

Trong nhiều trường hợp để tránh những khó khăn như thế ta áp dụng một phương pháp suy luận đặc biệt được gọi là " phương pháp quy nạp toán học", cho phép thay thế những hình dung tìm tòi theo phương pháp quy nạp không hoàn toàn bằng sự chứng minh chặt chẽ.

Ví dụ 7 : Xét lại công thức (1) ở ví dụ 2.

$$S_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

Giả sử ta đã chứng minh được công thức đó với n =7, khi chứng minh công thức này với n = 8, ta không cần phải tính tổng của 7 số hạng đầu của tổng :

$$S_8 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$$

mà ta đã biết rằng $S_7 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 7^2$

do đó có thể viết ngay: $S_8 = 7 +^2 15 = 7^2 + 2.7 + 1 = (7 + 1)^2 = 8^2$

Tổng quát, sau khi chứng minh công thức trên với $n = k$ (nghĩa là ta có $S_k = k^2$), ta chứng minh nó với $n' = k + 1$ bằng cách:

$$S_{n'} = S_{k+1} = S_k + (2(k + 1) - 1)$$

$$= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2 = (n')^2$$

Có thể sử dụng phương pháp tổng quát này sau khi đã xét $S_1 = 1 = 1^2$; những việc chuyển từ các đẳng thức khác :

$S_2 = 1 + 3 = 2^2$

$S_3 = 1 + 3 + 5 = 3^2$; v...v là các trường hợp riêng của phép tính.

Khái quát những điều nói trên, chúng ta phát biểu quy tắc tổng quát như sau:

Để chứng minh một mệnh đề tổng quát nào đó đúng với đúng với mọi số $n \in N^*$, ta chỉ cần:

a) Xác lập mệnh đề đúng với *n* =1

b) Chứng minh rằng nếu mệnh đề đúng với *n = k* ($k \in N^*$) thì mệnh đề đúng với *n = k+1*.

Tính hợp pháp của phương pháp chứng minh như thế là "hiển nhiên". Nhưng sự "hiển nhiên" đó không phải là một chứng minh chặt chẽ. Người ta đã chứng minh được rằng mệnh đề tổng quát ở trên có thể được chứng minh xuất phát từ một số mệnh đề tổng quát khác, được thừa nhận là tiên đề. Tuy nhiên, bản thân các tiên đề này cũng không rõ ràng hơn các nguyên lý quy nạp mà chúng ta sẽ trình bày dưới đây, và do đó chúng ta coi nguyên lý quy nạp toán học này chính là tiên đề thì mức độ " hợp pháp " cũng ngang như thế.

***2.2. Nguyên lý quy nạp toán học*:**

Một mệnh đề phụ thuộc vào *n* ($n \in N^*$) được coi là đã được chứng minh với mọi số *n* nếu 2 điều kiện sau được thoả mãn:

a. Mệnh đề đúng với *n* = 1

b. Từ sự đúng đắn của mệnh đề với một số tự nhiên *n = k* nào đó thì suy ra sự đúng đắn của nó với *n = k+1*

2.3 Ví dụ: Sau đây chúng ta xét một vài ví dụ sử dụng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh các mệnh đề toán học.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng:

$$S_n = -1 + 3 - 5 + 7 - 9 + ... + (-1)^n (2n - 1) = (-1)^n .n$$

Giải:

a) Ta có với $n = 1 \Rightarrow S_1 = -1 = (-1)^1.1$

Do đó mệnh đề đúng với *n* = 1

b) Giả sử rằng mệnh đề đúng với *n* = *k* ($k \in N^*$) tức là đã chứng minh được rằng:

$$S_k = -1 + 3 - 5 + 7 - 9 + ... + (-1)^k(2k-1) = (-1)^k.k$$

Ta sẽ chứng minh mệnh đề cũng đúng với *n* = *k+1*. Nghĩa là phải chứng minh:

$$S_{k+1} = -1 + 3 - 5 + 7 - 9 + ... + (-1)^k(2k-1) + (-1)^{k+1}(2k+1) = (-1)^{k+1}.(k+1)$$

Thật vậy, ta có: $S_{k+1} = S_k + (-1)^{k+1}(2k+1)$

$$= (-1)^k k + (-1)^{k+1}(2k+1)$$

$$= (-1)^k(k - 2k - 1)$$

$$= (-1)^k(-k-1)$$

$$= (-1)^{k+1}(k+1)$$

Từ đó theo nguyên lý quy nạp toán học ta có :

$S_n = -1 + 3 - 5 + 7 - 9 + ... + (-1)^n(2n-1) = (-1)^n.n$ với mọi $n \in N^*$.

<u>Ví dụ 9</u>. Chứng minh rằng :

$$S_n = (1-\frac{1}{2}).(1-\frac{1}{3})...(1-\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1} \text{ với } \forall n \in N^*$$

Giải : a) Với *n = 1* ta có $S_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$

=> mệnh đề đúng với *n = 1.*

b) Giả sử mệnh đề đúng với n = k ($k \in N^*$) tức là ta có

$$S_k = (1-\frac{1}{2}).(1-\frac{1}{3})...(1-\frac{1}{k+1}) = \frac{1}{k+1}$$

Ta sẽ chứng minh mệnh đề cũng đúng với n = k+1 nghĩa là:

$$S_{k+1} = (1-\frac{1}{2}).(1-\frac{1}{3})...(1-\frac{1}{k+1})(1-\frac{1}{k+2}) = \frac{1}{k+2}$$

Thật vậy: $S_{k+1} = S_k.(1-\frac{1}{k+2})$

$$= \frac{1}{k+1}.\frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{k+2}$$

Từ đó theo nguyên lý quy nạp toán học, mệnh đề được chứng minh.

2.4 Bây giờ chúng ta sẽ đưa ra một số ví dụ áp dụng không đúng phương pháp quy nạp toán học.

<u>Ví dụ 10</u>. Xét mệnh đề : " Bất kỳ một tập hợp hữu hạn các số tự nhiên nào cũng gồm toàn những số bằng nhau".

Chứng minh: Ta tiến hành quy nạp theo số phần tử của tập hợp.

a) Với n = 1, mệnh đề là hiển nhiên : mỗi số luôn bằng chính nó.

b) Giả sử mệnh đề đã được chứng minh với tập hợp có k phần tử. Lấy tập hợp có k +1 phần tử a_1 ; a_2 ; a_3 ;...; a_k ; a_{k+1} . Theo giả thiết quy nạp ta có $a_1 = a_2 = ... = a_k$, cũng theo giả thiết quy nạp thì ta có : $a_2 = a_3 = ... = a_k = a_{k+1}$;

từ đó $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_k = a_{k+1}$.

Vậy theo nguyên lý quy nạp toán học suy ra mệnh đề trên đúng.

* Sai lầm của suy luận trên là ở chỗ chỉ có thể chuyển từ *k* đến *k+1* với $k \geq 2$; nhưng không thể chuyển từ *n = 1* đến *n = 2* bằng suy luận này được.

<u>Ví dụ 11</u>. Mọi số tự nhiên đều bằng số tự nhiên tiếp sau nó.

Chứng minh: Giả sử mệnh đề đúng với *n = k*, với $k \in N^*$; tức là ta có *k = k+1.*

Ta sẽ chứng minh rằng khi đó mệnh đề đúng với *n = k+1*; tức là phải chứng minh *k+1 = k+2.*

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có *k = k+1 => k+1 = k+1+1 => k+1 = k+2.*

Từ đó theo nguyên lý quy nạp toán học, mệnh đề trên luôn đúng với $\forall n \in N^*$.

Sai lầm của suy luận trên là đã quên kiểm tra định lý có đúng khi *n = 1* không? Ta thấy rõ ràng rằng khi *n = 1* thì mệnh đề không đúng (vì $1 \neq 2$), do đó ở đây ta không áp dụng được phương pháp quy nạp toán học được.

Để kết thúc đoạn này, chúng tôi lưu ý các bạn rằng trong nhiều trường hợp cần phải chứng minh một mệnh đề nào đó đúng không phải với tất cả các số tự nhiên mà chỉ với $n \geq p$ ($p \in N^*$) thì nguyên lý quy nạp được trình bày dưới dạng sau:

Nếu : a) Mệnh đề đúng với $n = p$;

b) Từ giả thiết mệnh đề đúng với các số tự nhiên $n = k \geq p$ ta suy ra mệnh đề cũng đúng với $n = k+1$.

Thì khi đó mệnh đề sẽ đúng với tất cả các số tự nhiên $n \geq p$.

Phần II. Vận dụng vào việc dạy & học toán ở trường phổ thông.

a. Vận dụng phép quy nạp hoàn toàn trong chứng minh một mệnh đề toán học

Một kết quả tổng quát được chứng minh trong tong trường hợp của một số hữu hạn các trường hợp, vét hết các khả năng có thể xảy ra thì kết quả đó được chứng minh hoàn toàn.

Ta xét một số ví dụ:

Ví dụ 1. Để chứng minh mệnh đề: " Phương trình (m – 1) x^2 – 2(2m – 1) x + 3m = 0 (1) luôn có nghiệm với mội giá trị của tham số m. "

Ta xét 2 trường hợp:

1) Với m = 1, PT (1) trở thành -2x + 1 = 0; PT này có nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

Như vậy trong trường hợp m = 1, mệnh đề trên đúng.

2) Với $m \neq 1$, PT (1) là PT bậc hai có

$$\Delta' = (2m-1)^2 - (m-1).3m = m^2 - m + 1 > 0$$ với mọi giá trị của m.

Do đó PT (1) có hai nghiệm phân biệt. Nghĩa là trong trường hợp này, PT (1) cũng có nghiệm.

Rõ ràng hai trường hợp trên ta đã xét hết các khả năng có thể có của m.

Vậy PT (1) có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Ví dụ 2. Để chứng minh định lý về tính chất của góc nội tiếp:

" Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn ". *(Trang 73 – SGK Toán 9 – Tập II).*

Để chứng minh đinh lý này, ta đã xét 3 trường hợp:

Trường hợp 1, Tâm đường tròn nằm trên một cạnh của góc.

Trường hợp 2. Tâm đường tròn nằm bên trong góc.

Trường hợp 3. Tâm đường tròn nằm bên ngoài góc.

Định lý được chứng minh trong trong trường hợp thì ta có thể nói là định lý đã được chứng minh hoàn toàn vì 3 trường hợp trên đã vét hết các khả năng co thể xảy ra.

b. Vận dụng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh một mệnh đề toán học

1. Phát hiện quy luật và chứng minh quy luật đó.

ở các phần trước, chúng ta đã làm quen với một vài ví dụ về việc tìm tòi phát hiện ra các quy luật (ví dụ 2, ví dụ 3).

Sau đây chúng tôi đưa thêm vài bài khác, trong đó, sau khi phát hiện ra quy luật, chúng ta sử dụng nguyên lý quy nạp để chứng minh.

Bài toán 1. Tính tổng $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$

Giải :

**** Tìm tòi :***

Xét $S_1 = 1 = \frac{1.(1+1)}{2}$

$S_2 = 1 + 2 = 3 = \frac{2(2+1)}{2}$

$S_3 = 1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3(3+1)}{2}$

$S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 3 = \frac{4(4+1)}{2}$

**** Dự đoán :*** $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

**** Chứng minh dự đoán :***

a) Với n = 1 ta có $S_1 = \frac{1.(1+1)}{2}$

=> dự đoán đúng.

b) Giả sử với $n = k$ ta có $S_k = \frac{k.(k+1)}{2}$ trong đó $k \in N^*$ bất kỳ.

Ta phải chứng minh với $n = k+1$ thì

$$S_{k+1} = \frac{(k+1).(k+2)}{2}$$

Thật vậy, ta có $S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$

$$S_{k+1} = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Từ đó theo nguyên lý quy nạp toán học ta có $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ với $\forall n \in N^*$.

tức là dự đoán của chúng ta đúng.

<u>Bài toán 2</u>: Tìm công thức tính tổng :

$$S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n-1}.n^2$$

Giải **:**

**** Tìm tòi:***

với n = 1 ta có $S_1 = 1^2 = 1 = (-1)^0.\frac{1(1+1)}{2}$

với n = 2 ta có $S_2 = 1^2 - 2^2 = -3 = (-1)^1.\frac{2(1+2)}{2}$

với n = 3 ta có $S_3 = 1^2 - 2^2 + 3^2 = 6 = (-1)^2.\frac{3(3+1)}{2}$

với n = 4 ta có $S_3 = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 = -10 = (-1)^3.\frac{4(4+1)}{2}$

**** Dự đoán :*** $S_n = (-1)^{n-1}.\frac{n(n+1)}{2}$ với $\forall n \in N^*$

**** Chứng minh dự đoán :***

a) Với n = 1 mệnh đề đúng.

b) Giả sử với n = k ($k \in N^*$) ta có: $S_k = (-1)^{k-1}.\frac{k(k+1)}{2}$

ta phải chứng minh với n = k+1 thì: $S_{k+1} = (-1)^k.\frac{(k+1)(k+3)}{2}$

Thật vật, ta có:

+ Với k lẻ thì:

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)^2 = \frac{(k+1).(k+3)}{2}$$
$$= (-1)^{k-1}.\frac{(k+1)(k+3)}{2}$$

+ Với k chẵn thì:

$$S_{k+1} = S_k - (k+1)^2 = -\frac{k(k+1)}{2} - (k+1)^2 = -\frac{(k+1).(k+3)}{2}$$
$$= (-1)^{k-1}.\frac{(k+1)(k+3)}{2}$$

Từ đó với $\forall k \in N^*$ ta có $S_k = (-1)^{k-1}.\frac{k(k+1)}{2}$

Vậy theo nguyên lý quy nạp toán học thì:

$S_n = (-1)^{n-1}.\frac{n(n+1)}{2}$ với $\forall n \geq 1$

tức là dự đoán của chúng ta đúng.

2. Vận dụng vào giải toán chia hết :

<u>Bài toán 3</u>. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có:

a) $(4^n + 15n - 1) \vdots 9$

b) $(10^n + 18n - 28) \vdots 27$

Giải :

a) Đặt $S_n = (4^n + 15n - 1)$

+ Với n = 1 => $S_1 = 4^1 + 15.1 - 1 = 18 \vdots 9$

=> với n = 1, mệnh đề đúng.

+ Giả sử mệnh đề đúng với n = k ($k \in N^*$) nghĩa là ta có $S_k = (4^k + 15k - 1) \vdots 9$ hay $4^k + 15k - 1 = 9m (m \in N)$ => $4^k = 9m - 15k + 1$ (*)

với n = k+1 ta có :

$$
\begin{aligned}
S_{k+1} &= 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 \\
&= 4.4^{k} + 15k + 14 \\
&= 4(9m - 15k + 1) + 15k + 14 \\
&= 9.(4m - 5k + 2) \vdots 9
\end{aligned}
$$

tức là với n = k+1 thì mệnh đề cũng đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp ta có: $S_n = 4^n + 15n - 1 \vdots 9$

b) Đặt $S_n = 10^n + 18n - 28$

+ Với n = 1 => $S_1 = 0 \vdots 27$ => mệnh đề đúng

+ Giả sử với n = k ta có $S_k \vdots 27$ tức là

$$
\begin{aligned}
& 10^k + 18k - 28 \vdots 27 \\
\Leftrightarrow\ & 10^k + 18k - 28 = 27m (m \in Z) \\
\Leftrightarrow\ & 10^k = 27m - 18k + 28 (*)
\end{aligned}
$$

Xét :

$$
\begin{aligned}
S_{k+1} &= 10^{k+1} + 18(k+1) - 28 \\
&= 10.10^k + 18k - 10 \\
&= 10(27m - 18k + 28) + 18k - 10 \\
&= 27(10m - 6k + 10) \vdots 27
\end{aligned}
$$

nghĩa là với *n = k +1*, mệnh đề cũng đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp toán học ta được: $S_n = (10^n + 18n - 28) \vdots 27 \forall n \in N^*$

<u>Bài toán 4</u>. Chứng minh rằng:

$$P_n = (n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) \vdots 24 \text{ với } \forall n \in N^*$$

Giải :

* a) Khi *n = 1* mệnh đề đúng.

b) Giả sử với *n = k* ta có : $P_k = (k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k) \vdots 24$

ta sẽ chứng minh với *n = k+1* thì: $P_{k+1} = (k+1)^4 + 6(k+1)^3 + 11(k+1)^2 + 6(k+1) \vdots 24 (*)$

Vì $P_{k+1} = (k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k) + 24(k^2 + 1) + 4(k^3 + 11k)$

nên nếu chứng minh được $(k^3 + 11k) \vdots 6$ thì ta sẽ có $P_{k+1} \vdots 24$

*Xét $S_k = k^3 + 11k$

a) với $k = 1$ ta có $S_1 = 1^3 + 11.1 = 12 \vdots 6$ => $S_k \vdots 6$

b) Giả sử với $k = m$ ta có $S_m = m^3 + 11m \vdots 6$ ta sẽ chứng minh với $k = m+1$ thì $S_{m+1} \vdots 6$

Thật vậy, $S_{m+1} = (m+1)^3 + 11(m+1) = m^3 + 11m + 12 + 3m(m+1)$

vì $m^3 + 11m \vdots 6$; $12 \vdots 6$; $3m(m+1) \vdots 6$ (do một trong 2 số m và $m+1$ là 2 số tự nhiên liên tiếp phải có một số chẵn nên $m(m+1) \vdots 2$)

Từ đó $S_{m+1} \vdots 6$

Theo nguyên lý quy nạp toán học thì $S_k \vdots 6$ với $\forall k \in N^*$

Vậy $P_{k+1} \vdots 24$, tức là theo nguyên lý quy nạp toán học ta có :

$$P_n = (n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) \vdots 24$$

3. Vận dụng vào việc chứng minh đồng nhất thức.

<u>Bài toán 5</u>. Chứng minh rằng:

$S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ (1) với mọi giá trị của $x \neq 1$.

Giải: a) Ta có $S_1 = 1 + x = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ với $x \neq 1$

do đó đẳng thức (1) đúng với n = 1.

b) giả sử ta đã có $S_k = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^k = \dfrac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$ (2)

ta sẽ chứng minh khi đó :

$S_{k+1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^k + x^{k+1} = \dfrac{x^{k+2} - 1}{x - 1}$ (3)

Thật vậy, ta có $S_{k+1} = S_k + x^{k+1}$

$$= \frac{x^{k+1}-1}{x-1} + x^{k+1}$$
$$= \frac{x^{k+2}-1}{x-1}$$

Do đó theo nguyên lý quy nạp thì đẳng thức (1) luôn đúng với $\forall n \in N^*$; $x \neq 1$.

Bài toán 6. Chứng minh rằng với tất cả các giá trị có thể có của x, đồng nhất thức sau luôn đúng:

$$S_n = (x - \frac{1}{x})^2 + (x^2 - \frac{1}{x^2})^2 + ... + (x^n - \frac{1}{x^n})^n = \frac{1}{x^2-1}.(x^{2n+2} - \frac{1}{x^{2n}}) - 2n - 1 (1)$$

Giải : Ta phải chứng minh (1) đúng với $\forall n \in N^*$, $x \neq 0$ và $x \neq \pm 1$.

a) Với *n = 1* => $S_1 = (x - \frac{1}{x})^2 = \frac{1}{x^2-1}(x^4 - \frac{1}{x^2}) - 3$ đúng => với n=1 thì (1) đúng.

b) Giả sử với *n = k* thì (1) đúng, nghĩa là:

$$S_k = (x - \frac{1}{x})^2 + (x^2 - \frac{1}{x^2})^2 + ... + (x^k - \frac{1}{x^k})^k = \frac{1}{x^2-1}.(x^{2k+2} - \frac{1}{x^{2k}}) - 2k - 1.$$

Ta sẽ chứng minh khi đó:

$$S_{k+1} = (x - \frac{1}{x})^2 + (x^2 - \frac{1}{x^2})^2 + ... + (x^k - \frac{1}{x^k})^2 + (x^{k+1} - \frac{1}{x^{k+1}})^2$$
$$= \frac{1}{x^2-1}.(x^{2k+4} - \frac{1}{x^{2k+2}}) - 2(k+1) - 1$$

Thật vậy ta có: $S_{k+1} = S_k + (x^{k+1} - \frac{1}{x^{k+1}})^2$

$$= \frac{1}{x^2-1}.(x^{2k+1} - \frac{1}{x^{2k}}) - 2k - 1 + (x^{k+1} - \frac{1}{x^{k+1}})^2$$
$$= \frac{x^{4k+4} - x^2 + x^{4k+6} - x^{4k+4} + x^2 - 1}{(x^2-1).x^{2k+2}} - 2(k+1) - 1$$

$$=> S_{k+1} = \frac{1}{x^2-1}.(x^{2k+4} - \frac{1}{x^{2k+2}}) - 2(k+1) - 1$$

tức là (1) đúng với n = k+1.

Vậy theo nguyên lý quy nạp toán học thì đồng nhất thức (1) luôn đúng với $\forall n \in N^*$, $x \neq 0$ và $x \neq \pm 1$.

Bài toán 7. Chứng minh rằng :

$$S_n = 3 + 33 + ... + \underset{nchuso}{333...3} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27} \quad (1)$$

Giải: a) Với *n = 1* ta có $S_1 = 3 = \frac{10^2 - 9.1 - 10}{27} = 3$

=> công thức (1) đúng với *n = 1*.

b) Giả sử $S_k = 3 + 33 + ... + \underset{kchuso}{333...3} = \frac{10^{k+1} - 9k - 10}{27}$ (2)

ta có $S_{k+1} = 3 + 33 + ... + \underset{kchuso}{333...3} + \underset{k+1chuso}{333...3} = \frac{10^{k+1} - 9k - 10}{27}$ (2)

$$= S_k + \underset{(k+1)chuso}{333...3}$$

$$= \frac{10^{k+1} - 9k - 10}{27} + 3(1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{k-1} + 1)$$

$$= \frac{10^{k+1} - 9k - 10}{27} + 3.\frac{10^{k+1} - 1}{9}$$

$$= \frac{10.10^{k+1} - (9k + 9) - 10}{27} = \frac{10^{k+2} - 9(k + 1) - 10}{27}$$

Do đó theo nguyên lý quy nạp toán học ta có:

$$S_n = 3 + 33 + ... + \underset{nchuso}{333...3} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$$

4. Vận dụng vào chứng minh bất đẳng thức :

<u>Bài toán 8</u> . Chứng minh rằng $2^n > 2n + 1$ với $\forall n \in N; n \geq 3$.

<u>Giải</u>:

a) Khi *n = 3* bất đẳng thức (1) đúng vì $2^3 > 2.3 + 1$

b) Giả sử rằng với $n = k \geq 3$ ta có $2^k > 2k + 1$ (2)

ta phải chứng minh $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$ (3)

Thật vậy ta có $2^{k+1} = 2.2^k > 2.(2k + 1) + 1$ (áp dụng (2))

$$= (2k+3) + (2k-1)$$
$$> 2k+3.$$

(vì $2k-1>0$ với $\forall k \geq 3; k \in N$)

=> bất đẳng thức (3) đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp toán học thì: $2^n > 2n+1$ với $\forall n \in N; n \geq 3$.

Bài toán 9: Chứng minh bất đẳng thức sau với $\forall n \in N^*$:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{3n+1} > 1 \ (1)$$

(vế trái của bất đẳng thức (1) là tổng của các phân số mà mẫu số tăng liên tiếp từ n+1 đến 3n+1; ví dụ với n = 3 thì bất đẳng thức (1) có dạng:

$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} > 1$ vì n +1 = 3+1 = 4; 3n+1 = 3.3+1 = 10).

Giải :

a) Khi *n = 1* ta có bất đẳng thức đúng : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1.$

b) Giả sử với *n = k* ta có: $S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{3k+1} > 1 \ (2)$

Ta sẽ chứng minh với *n = k+1* thì có:

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{3(k+1)+1} > 1 \, (3)$$

Thật vậy ta có :

$$S_{k+1} = (\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{3k+1}) + (\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1})$$

$$= S_k + \frac{2}{3(k+1)(3k+2)(3k+4)} > 1$$

do theo (2) : $S_k > 1$ => (3) đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp toán học thì:

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{3n+1} > 1 \text{ với } \forall n \in N^*.$$

5. Vận dụng vào các bài toán hình học

Bài toán 9: Chứng minh rằng n đường thẳng khác nhau trên một mặt phẳng đi qua một điểm chia mặt phẳng ra 2n phần.

Giải:* Với n = 1 thì mệnh đề khẳng định là đúng, vì 1 đường thẳng chia mặt phẳng ra 2 phần.

* Giả sử mệnh đề đúng với n = k nào đó, nghĩa là với k đường thẳng khác nhau cùng đi qua một điểm chia mặt phẳng thành 2k phần.

Để chứng minh mệnh đề cũng đúng với k + 1 đường thẳng, ta nhận xét rằng nếu dựng đường thẳng thứ k + 1, đi qua điểm đã cho và không trùng với đường thẳng nào thì sẽ tạo thêm 2 phần nữa của mặt phẳng; và như vậy số phần mặt phẳng tạo bởi k + 1 đường thẳng khác nhau cùng đi qua 1 điểm là 2k + 2 = 2 (k + 1).

Theo nguyên lý quy nạp toán học thì mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên n khác 0.

Bài toán 10: Cho n hình vuông bất kỳ. Chứng minh rằng ta có thể cắt chúng ra thành một số phần để từ các phần đó có thể ghép lại thành một hình vuông mới.

Giải: * Với n = 1 thì mệnh đề là hiển nhiên.

* Với n = 2 ta chứng minh được mệnh đề cũng đúng.

* Giả sử mệnh đề đúng với n = k, nghĩa là từ k hình vuông, ta có thể cắt và ghép thành một hình vuông. Xét k + 1 hình vuông: V_1, V_2, …, V_{k-1}, V_k, V_{k+1}. Ta lấy ra 2 hình vuông bất kỳ trong số k + 1 hình vuông này, chẳng hạn V_k, V_{k+1}. Theo trên ta có thể cắt và ghép thành một hình vuông V’; do đó ta sẽ có k hình vuông V_1, V_2, …, V_{k-1}, V’. Theo giả thiết quy nạp, từ k hình vuông này ta có thể cắt và ghép lại thành một hình vuông mới.

Vậy mệnh đề đúng với n = k + 1. Theo nguyên lý quy nạp toán học thì mệnh đề đúng với n hình vuông bất kỳ.

Bài toán 11: Trong mặt phẳng cho $n \geq 3$ điểm, tất cả không nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng tất cả các đường thẳng nối 2 điểm trong các điểm đã cho tạo ra số đường thẳng không nhỏ hơn n.

Giải: * Với n = 3, mệnh đề hiển nhiên đúng: với 3 điểm không thẳng hàng, nối từng đôi lại với nhau tạo ra 3 đường thẳng khác nhau.

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 3$ điểm. Ta chứng minh nó cũng đúng với k + 1 điểm. Ta nhận thấy có ít nhất một đường thẳng chỉ chứa 2 điểm A_k và A_{k+1} chẳng hạn.

+ Nếu các điểm $A_1, A_2, ,,,,; A_{k+1}, A_k$ cùng nằm trên một đường thẳng (là đường thẳng d chẳng hạn) thì số đường thẳng sẽ là k + 1 (đó là k đường thẳng nối A_{k+1} với n điểm $A_1, A_2, ….,; A_{k-1}, A_k$ và đường thẳng d).

+ Nếu $A_1, A_2,…; A_{k-1}, A_k$ không cùng nằm trên một đường thẳng thì theo giả thiết quy nạp ta có k đường thẳng khác nhau từ k điểm này; Ngoài ra ta có các đường thẳng nối A_{k+1} với các điểm $A_1, A_2, ; …; A_{k-1}, A_k$, do đường thẳng A_kA_{k+1} không chứa một điểm nào trong các điểm $A_1, A_2, ; …; A_{k-1}$ nên đường thẳng A_kA_{k+1} khác các đường thẳng nối A_{k+1+} với các điểm $A_1, A_2, …; A_{k-1}$. Từ đó số đường thẳng tạo cũng không nhỏ hơn k + 1.

Vậy mệnh đề cũng đúng với n = k + 1. Theo nguyên lý quy nạp toán học thì mệnh đề đúng với mọi $n \geq 3$.

Bài toán 12: Chứng minh rằng tổng các góc trong của một n-giác lồi bằng (n – 2) 180^0.

Giải: * Với n = 3, mệnh đề hiển nhiên đúng: Tổng các góc trong của một tam giác bằng (3 – 2).$180^0 = 180^0$.

* Giả sử mệnh đề đúng tất cả k-giác, với k < n. Ta chứng minh nó cũng đúng với mọi n – giác.Ta nhận thấy một n – giác có thể chia thành 2 đa giác bởi một đường chéo, nếu số cạnh của một đa giác đó là m + 1 thì số cạnh của đa giác kia là n – m + 1 và cả 2 số đó đều nhỏ hơn n. Do đó tổng các góc trong của các đa giác đó

tương ứng bằng (m – 1).180^0 và (n – m - 1) .180^0. Khi đó tổng các góc của n – giác bằng tổng các góc trong của các đa giác đó, tức là bằng:

(m – 1 + n – m - 1).180^0 = (n – 2) .180^0.

Vậy theo nguyên lý quy nạp toán học thì mệnh đề đúng với mọi n $\geq$ 3.

6. có thể có cách khác hay hơn không ?

Một kết luận được chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học, thì có thể chứng minh bằng một phương pháp khác nào đó, ngắn gọn hơn, hay hơn phương pháp quy nạp toán học.

Ta hãy xét một vài ví dụ:

1) Xét lại bài toán 7 ở trên:

Chứng minh : $S_n = 3 + 33 + ... + \underbrace{333...3}_{n} = \dfrac{10^{n+1} - 9n + 10}{27}$

<u>Giải</u>:

$$S_n = \frac{1}{3}(9 + 99 + ... + 999...9) = \frac{1}{3}(10 - 1 + 10^2 - 1 + ... + 10^n - 1)$$

$$= \frac{1}{3}\left[(1 + 10 + 10^2 + ... + 10^n) - (n+1)\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} - (n+1)\right]$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{9} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$$

-> đpcm.

2) Chứng minh: $S_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15} + ... + \dfrac{1}{4n^2 - 1} = \dfrac{n}{2n+1}$.

<u>Giải</u>: Xét với $k \in Z; k \geq 1$ có:

$$\frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

Từ đó với *k = 1,* ta có: $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4.1^2 - 1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{3}\right)$

k = *2,* ta có: $\frac{1}{15}=\frac{1}{4.2^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$

k = 3: $\frac{1}{35}=\frac{1}{4.3^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$

……………………..

k = n: $\frac{1}{4.n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

Cộng các đẳng thức này với nhau, ta được:

$$S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+...+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}.$$

-> đpcm.

3) Chứng minh rằng $S_n=\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$

<u>Giải</u>: Xét với $k\in Z;k\geq 1$ có:

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1})$$

Từ đó: với *k = 1,* ta có: $\frac{1}{1.4}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)$

k = *2,* ta có: $\frac{1}{4.7}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)$

k = 3: ta có: $\frac{1}{7.10}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)$

………………

k = n: $\frac{1}{(3n-2).(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$

Cộng các đẳng thức này với nhau, ta được:

$$S_n=\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

-> đpcm.

Tuy nhiên, phương pháp quy nạp toán học là phương pháp có nhiều ưu điểm nổi trội vì nó giải được một lớp các bài toán thuộc các dạng khác nhau, trong cả các phân môn Số học, Đại số và Hình học như đã chỉ ra trong các phần trên.

7. Bổ xung: Một số dạng nguyên lý quy nạp toán học

Chúng ta xét một số dạng nguyên lý quy nạp khác, được phát biểu dưới dạng các định lý 2 và định lý 3. Sau mỗi định lý chúng tôi tuyển chọn một số bài toán minh hoạ.

Định lý 2. Cho p là số nguyên dương và dãy các mệnh đề P(1); P(2); …; P(n); …

Nếu: A) P(1); P(2); …; P(p) là những mệnh đề đúng và

B) Với mỗi số tự nhiên k $\geq$ p các mệnh đề P(k-p+1); P(k-p+2); …; P(k) dúng, suy ra mệnh đề P(k+1) cũng đúng

Thì mệnh đề P(n) đúng với mọi số nguyên dương n.

Chứng minh định lí này hoàn toàn lặp lại như định lí 1.1. Sau đây ta xét một số ví dụ sử dụng dạng định lí 2.1.

<u>Bài toán 2.1</u> Cho $v_0 = 2, v_1 = 3$ và với mỗi số tự nhiên k có đẳng thức như sau $v_{k+1} = 3v_k - 2v_{k-1}$ chứng minh rằng $v_n = 2^n + 1$

Giải: Bước cơ sở: Với n=0 và n=1 kết luận bài toán đúng, do điều kiện bài đã cho.

Bước quy nạp: Giả sử rằng $v_{k-1} = 2^{k-1} + 1; v_k = 2^k + 1$ khi đó

$v_{k+1} = 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) = 2^{k+1} + 1$

Theo nguyên lí quy nạp toán học dạng định lí 2.1, suy ra $v_n = 2^n + 1$ đúng với mọi số tự nhiên n.

<u>Bài toán 2.2</u> Cho x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 27x + 14 = 0$; n là số tự nhiên bất kì. Chứng minh rằng tổng $S_n = x_1^n + x_2^n$ không chia hết cho 715.

Giải: Theo công thức Viet $x_1 + x_2 = 27; x_1x_2 = 14$.

Bước cơ sở: Các số $S_1 = 7; S_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 701$ và $S_3 = (x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right] = 27.687$ đều không chia hết cho 715. Suy ra mệnh đề của bài toán đúng với n=1, 2, 3.

Bước quy nạp: Giả sử mệnh đề đúng với n=k-2, n=k-1, n=k ta tính

$$\begin{aligned}
&x_1^{k+1} + x_2^{k+1} = (x_1 + x_2)(x_1^k + x_2^k) - x_1x_2(x_1^{k-1} + x_2^{k-1})\\
&= (x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) - x_1x_2(x_1^{k-2} - x_2^{k-2})\ \right] - x_1x_2(x_1^{k-1} + x_2^{k-1})\\
&= 715(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) - 378(x_1^{k-2} + x_2^{k-2})
\end{aligned}$$

Do đó $x_1^{k+1} + x_2^{k+1}$ không chia hết cho 715, vì 378 không chia hết cho 715, nói cách khác mệnh đề đúng với n=k+1.

<u>Bài toán 2.3</u> Chứng minh với mọi số thực x > 0 và mọi số tự nhiên n bất đẳng thức sau đúng $x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + ... + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geq n + 1$

Giải: 1a) Với n=1 bất đẳng thức (2.1) có dạng $x + \frac{1}{x} \geq 2$ (2.2)

bất đẳng thức (2.2) suy ra từ bất đẳng thức hiển nhiên: $(x-1)^2 \geq 0$

1b) Với n=2 bất đẳng thức (2.1) có dạng $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 3$ (2.3)

Bất đẳng thức (2.2) đúng với mọi giá trị x > 0 nên nó cũng đúng cho x^2. Do đó ta có $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$; từ đó suy ra (2.3).

2) Giả sử bất đẳng thức (2.1) đúng với n=k, với k là một số tự nhiên nào đó; tức là ta có: $x^k + x^{k-2} + x^{k-4} + ... + \frac{1}{x^{k-4}} + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} \geq k + 1$ (2.4)

ta sẽ chứng minh khi đó bất đẳng thức (2.1) đúng với n= k+2, hay là

$$x^{k+2} + x^k + x^{k-2} + ... + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^{k+2}} \geq k + 3 \quad (2.5)$$

Thật vậy, trong (2.2) thê x bằng x^{k+2} ta nhận được $x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}} \geq 2$ (2.6)

Cộng vế tương ứng của các bất đẳng thức (2.4) và (2.6), ta sẽ có (2.5)

Tóm lại:

Bước cơ sở: Trong 1a) và 1b) ta đã chứng minh bất đẳng thức đúng cho n=1 và n=2.

Bước quy nạp: Trong 2) ta đã chứng minh từ giả thiết đúng của (2.1) với n=k suy ra nó đúng với n=k+2. Kết quả là:

+ Từ 1a) và 2) cho ta khẳng định là bất đẳng thức (2.1) đúng với mọi số lẻ n.

+ Từ 1b) và 2) cho ta khẳng định là bất đẳng thức (2.1) đúng với mọi số chẵn n.

Như vậy, bất đẳng thức (2.1) đúng với mọi số tự nhiên n.

Định lý 3. Cho dãy các mệnh đề P(1); P(2); …; P(n); …

Nếu: A) P(1) những mệnh đề đúng và

B) Với mỗi số tự nhiên n $\geq$ 1 các mệnh đề P(1); P(2); …; P(k) đúng, suy ra mệnh đề P(k+1) cũng đúng

Thì mệnh đề P(n) đúng với mọi số nguyên dương n.

Dạng này khác với các dạng trước là giả thiết mạnh hơn ở bước quy nạp. Ta giả thiết tất cả khẳng định P(1), P(2),…,P(k) đúng suy ra P(k+1) cũng đúng. Dễ dàng chứng minh hai cách phát biểu định lý 1.1 và định lí 2.2 tương đương nhau. Nhưng trong thực tế áp dụng vào bài toán cụ thể dùng định lí 2.2 dễ dàng giải hơn.

<u>Bài toán 3.1</u>. Chứng minh rằng nếu $x+\frac{1}{x}$ là số nguyên thì $x^n+\frac{1}{x^n}$ cũng là số nguyên với mọi số tự nhiên n.

Giải: ***Bước cơ sở***: Khi n=1 mệnh đề hiển nhiên đúng.

Bước quy nạp: Giả sử với mọi số tự nhiên từ 1 đến k, $x^k+\frac{1}{x^k}$ là những số nguyên. Ta cần chứng minh rằng $x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}$ cũng là một số nguyên.

Thật vậy $x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}=x(x+\frac{1}{x})(x^k+\frac{1}{x^k})-(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}})$

Theo giả thiết cả 3 biểu thức $x+\frac{1}{x}$, $x^k+\frac{1}{x^k}$, $x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}$ đều biểu diễn các số nguyên .

Vậy $x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}$ cũng là một số nguyên.

Bài toán 2.3. Chứng minh rằng mọi số tự nhiên lớn hơn 1 có thể biểu diễn dưới dạng tích của những số nguyên tố .

Giải: ***Bước cơ sở:*** Hiển nhiên mệnh đề đúng với mọi số nguyên tố, trường hợp đặc biệt n=2.

Bước quy nạp: Giả sử mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên k, mà $2 \le k < n$. Nghĩa là mọi số $2 \le k < n$ đều biểu diễn dưới dạng tích các thừa số nguyên tố. Ta xét hai trường hợp

1) Nếu n là số nguyên tố thì mệnh đề đúng.

2) Nếu n là hợp số thì theo định nghĩa hợp số tồn tại hai số nguyên $n_1 < n$ và $n_2 < n$ sao cho $n = n_1 n_2$. Theo giả thiết quy nạp n_1 và n_2 đều biểu diễn được thành tích các số nguyên tố. Do đó suy ra n cũng biểu diễn được thành tích các số nguyên tố.

Phần III. Hiệu quả của đề tài

I. Một số bài kiểm tra:

Chúng tôi chọn ra một số bài toán để các bạn tự kiểm tra sau khi nghiên cứu chuyên đề này, hoặc có thể lấy làm đề kiểm tra cho học sinh.

Bài số 1:

Phương án 1: 1) Chứng minh rằng $2^n > n^2$ với các số tự nhiên $n \geq 5$.

2) Chứng minh rằng: $(2^{n+5}.3^{4n} + 5^{2n+1}) \vdots 37$ với $\forall n \in N$.

Phương án 2: 1) Chứng minh rằng với các số dương a; b bất đẳng thức sau đúng với $\forall n \in N^*$. $2^{n-1}.(a^n + b^n) > (a+b)^n$.

2) Chứng minh rằng: $(7^{n+2} + 8^{2n+1}) \vdots 57$ với $\forall n \in N$.

Bài số 2:

Phương án 1. 1) Chứng minh rằng:

$$S_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + ... + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

2) Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$$

Phương án 2 :

1) Chứng minh rằng:

$$S_n = \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + ... + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

2) Chứng minh rằng:

$$\frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + ... + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

Bài số 3: 1) Chứng minh rằng : $(5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}) \vdots 3$ với $n \in N$

2) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, đồng nhất thức sau đúng:

$$(n+1)(n+2)...(n+n) = 2^n.1.3.5...(2n-1)$$

3) Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi $n \geq 2; n \in N$.

$(1+x)^n > 1 + nx$ với x > -1

Bài số 4. 1) Chứng minh với $\forall n \in N$: $(2^{n+2}.3^n + 5n - 4) \vdots 25$

2) Chứng minh rằng: $2.1^2 + 3.2^2 + ... + (n+1).n^2 = \dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$

3) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ ta có:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

Bài số 5. 1) Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + ... + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}} \text{ với } |x| \neq 1.$$

2) Chứng minh với mọi số tự nhiên $n \geq 2$:

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

3) Tìm công thức tính tổng:

$$S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... + (-1)^{n-1}.n.$$

II. Hiệu quả của đề tài:

1) Kết quả các bài kiểm tra:

Tôi đã chọn các bài kiểm tra cho các em sau khi học xong chuyên đề này (tuỳ theo mức độ đối với từng khối lớp):

Khối 6, 7: Kiểm tra 20 em bài 2. Kết quả:

Tổng số	Điểm 9 - 10	Điểm 7 – 8,5	Điểm 5 – 6,5	Điểm <5
20	7	9	3	1

Khối 8,9: Kiểm tra 20 em các bài 1 và bài 5. Kết quả:

Tổng số	Điểm 9 - 10	Điểm 7 – 8,5	Điểm 5 – 6,5	Điểm <5
20	9	9	2	0

2) Việc thực hiện thường xuyên phép quy nạp trong các giờ học chính khoá đã làm cho các giờ học sôi nổi hơn, học sinh rất thich thú. Bản thân giáo viên cũng rất phấn khởi, bỏ được tâm lý cho rằng sách giáo khoa quá tải, đã tập trung vào việc khai thác SGK gắn với việc cải tiến phương pháp giảng dạy.

3) Bên cạnh đó việc thực hiện chuyên đề nâng cao đối với HSG đã góp phần bồi dưỡng đội ngũ HSG về môn Toán của trường và của thành phố đạt được thành tích cao. Cụ thể:

Học sinh giỏi cấp Tỉnh:

+ Của trường: có 01 em đạt giải nhì;

+ Của thành phố: 10 em, trong đó cố 4/7 giải nhì; 5/14 giải ba và 1 giải khuyến khích (toàn tỉnh không có giải nhất).

Kết luận

I. Kết luận chung:

Việc thực hiện chuyên đề " Phép quy nạp và phương pháp quy nạp toán học ở trường phổ thông" đã thu được những kết quả khích lệ, cụ thể là:

1. Giáo viên và học sinh đã có những nhận thức đúng đắn về phép quy nạp, phân biệt được phép quy nạp hoàn toàn và chưa hoàn toàn. Từ đó có những cải tiến về phương pháp dạy và phương pháp học.

2. Đặc biệt, các em học sinh khá, giỏi đã hiểu rõ và vận dụng sáng tạo nguyên lý quy nạp toán học vào giải toán. Có thể nói các em đã được trang bị một phương pháp mới giải toán rất hữu hiệu đối với các bài toán toán học thuộc đủ các loại. Từ đó khơi dậy lòng ham mê, hứng thú tìm tòi, phát huy óc sáng tạo của các em, qua đó rèn luyện khả năng suy luận, phát triển tư duy lôgic. Các em đã trở thành cốt cán, phối hợp với giáo viên trong việc truyền tải và tiếp thu các bài học trên lớp giờ chính khoá, giúp cho giờ học sinh động hơn, hấp dẫn hơn và hiệu quả hơn, các em cũng phối hợp với giáo viên trong việc giúp đỡ các bạn học sinh yếu kém vươn lên.

II. Bài học sư phạm:

1) Muốn cải tiến, đổi mới phương pháp giảng dạy, người giáo viên cần phải luôn tự học, tự bồi dưỡng để nắm vững kiến thức cơ bản, có hệ thống. Đồng thời cần nắm vững chương trình – SGK vì đó là tài liệu vừa có tính pháp quy, vừa mang tính linh hoạt trong quá trình sử dụng tuỳ theo trình độ học sinh. Một trong những con đường là thực hiện các chuyên đề chuyên sâu, có tác dụng xuyên suốt chương trình – SGK, đồng thời có phần nâng cao cho đối tượng HS khá giỏi như chuyên đề mà chúng tôi thể hiện trên đây.

2) Đối với các em học sinh cần rèn cho các em kỹ năng, phương pháp tự học. Muốn vậy cần phải hướng dẫn các em thường xuyên, cụ thể, phải làm cho các em hiểu rõ SGK, phải giao việc cho các em tuỳ trình độ khả năng, từ thấp đến cao. Tôi thường động viên các em: " ***Không biết mới phải đi học, học rồi thì phải biết, biết rồi thì phải thạo, có thành thạo thì mới dẫn đến sáng tạo, mà có sáng tạo ắt sẽ có thành công"*** .

Việc rèn cho học sinh khả năng tự học vừa phải là một mục đích vờa là phương tiện của việc đổi mới phương pháp dạy học.

III. Một số ý kiến đề xuất

1) Mỗi giáo viên cần nắm chắc, có hệ thống kiến thức cơ bản và chương trình – SGK hiện hành.

2) Việc rèn cho học sinh khả năng tự học là một quá trình khó khăn, đòi hỏi mỗi giáo viện phải kiên trì, bền bỉ thực hiện thường xuyên.

3) Đối với các cấp quản lý giáo dục cần đổi mới nội dung thực hiện các chuyên đề về cải tiến phương pháp giảng dạy,

Trên đây là những suy nghĩ, tìm tòi của tôi về một vấn đề liên quan đến việc cải tiến phương pháp giảng dạy nhằm phát huy tính tích vực của học sinh. Do thời gian có hạn và khả năng còn hạn chế bên không tránh khỏi thiếu sót, mong được sự góp ý, động viên khích lệ của các cấp quản lý và của anh em đồng chí, đồng nghiệp để đề tài ngày càng hoàn thiện hơn. Chúng tôi xin chân thành cám ơn.

……, tháng… năm 20…….