Tiến Sĩ Vũ Tiến Lưỡng

SỬ DỤNG BĐT CÔ- SI
TÌM CỰC TRỊ HÌNH HỌC

Sưu tầm tổng hợp

SỬ DỤNG BĐT CÔSI ĐỂ TÌM CỰC TRỊ HÌNH HỌC

A - ĐẶT VẤN ĐỀ

Các bài toán về bất đẳng thức và cực trị hình học thuộc loại những bài toán khó, làm cho học sinh phổ thông, nhất là trung học cơ sở, kể cả học sinh giỏi lúng túng khi gặp dạng toán này. Thực sự đây là một phần rất quan trọng của hình học, và những kiến thức về bất đẳng thức trong hình học cũng làm phong phú hơn phạm vi ứng dụng của Toán học.

So với các bất đẳng thức đại số, các bất đẳng thức hình học chưa được quan tâm nhiều. Một trong những nguyên nhân khó giải quyết vấn đề này là vì phương pháp tiếp cận không phải là các phương pháp thông thường hay được áp dụng trong hình học, và cũng không phải chỉ là phương pháp đại số thuần tuý. Để giải một bài toán về bất đẳng thức hình học cần thiết phải biết vận dụng các kiến thức hình học và đại số một cách thích hợp và nhạy bén.

Qua thực tế những năm trực tiếp giảng dạy và tham gia bồi dưỡng học sinh giỏi Toán 9, tôi nhận thấy việc khai thác bất đẳng thức Côsi trong quá trình giải các bài toán bất đẳng thức và cực trị hình học là một hướng tiếp cận hiệu quả, không chỉ bởi lẽ đối tượng của hình học (diện tích, độ dài đoạn thẳng, số đo góc, …) và đối tượng để áp dụng BĐT Côsi là tương đồng (đại lượng không âm), mà còn bởi tính đa dạng của BĐT Côsi trong vận dụng. Sự khéo léo, linh hoạt trong việc khai thác BĐT Côsi là một yêu cầu đối với học sinh giỏi Toán. Mức độ khó, dễ của bài toán cũng có thể được điều chỉnh tuỳ theo chủ ý của người ra đề. Với những suy nghĩ đó, tôi mạnh dạn nghiên cứu đề tài “ **Khai thác bất đẳng thức Côsi trong việc ra các bài toán nâng cao lớp 9”**, mà cụ thể là các bài toán bất đẳng thức và cực trị hình học. Nội dung đề tài tạm chia làm ba phần. Phần một gồm một số bài toán điển hình và những nhận xét của tác giả. Phần hai là một vài suy nghĩ và những trao đổi xung quanh việc khai thác một bài toán gốc của đại số để cho ra những bài toán với những mức độ khác nhau của hình học, thông qua những ví dụ cụ thể minh hoạ. Và phần ba là một số bài tập đề xuất.

Mong muốn đây là một tài liệu tham khảo hữu ích với các em học sinh giỏi Toán lớp 9, và các thầy cô tham gia bồi dưỡng học sinh giỏi Toán THCS cùng các độc giả yêu thích Toán học.

B - NỘI DUNG

Ta bắt đầu bằng việc nhắc lại Bất đẳng thức Côsi:

Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số không âm. Ta luôn có:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

* Cách phát biểu khác cho BĐT Côsi là : Với các số không âm, trung bình cộng không nhỏ hơn trung bình nhân. Trung bình cộng và trung bình nhân bằng nhau khi và chỉ khi các số đó bằng nhau.

* Ý nghĩa của BĐT Côsi:

+ n số không âm có tổng không đổi, tích của chúng đạt giá trị lớn nhất khi các số đó bằng nhau.

+ n số dương có tích không đổi, tổng của chúng đạt giá trị nhỏ nhất khi các số đó bằng nhau.

I. Một số bài toán điển hình

Bài 1 : (Một kết quả đẹp và thú vị về tứ giác nội tiếp)

Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I. Chứng minh rằng :

$$\frac{AB}{CD}+\frac{CD}{AB}+\frac{BC}{AD}+\frac{AD}{BC} \leq \frac{IA}{IC}+\frac{IC}{IA}+\frac{IB}{ID}+\frac{ID}{IB}$$

Chứng minh : (Hình 1)

Dễ thấy $\Delta ABI \backsim \Delta DCI$ (g.g)

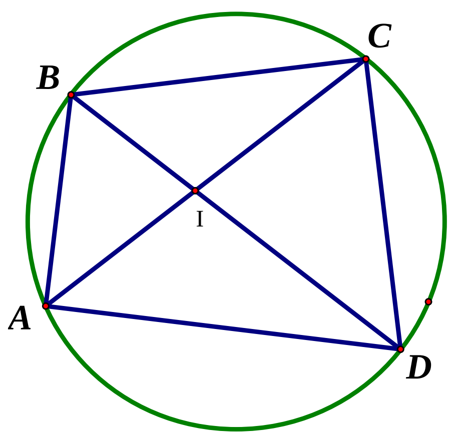
$$\Rightarrow \frac{AB}{CD}=\frac{AI}{DI}=\frac{BI}{CI} \Rightarrow \frac{AB}{CD}=\sqrt{\frac{AI}{DI}\cdot\frac{BI}{CI}} \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sqrt{\frac{AI}{DI}\cdot\frac{BI}{CI}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{AI}{CI}+\frac{BI}{ID}\right) \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{IA}{IC}=\frac{IB}{ID}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AB}{CD} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{IA}{IC}+\frac{IB}{ID}\right) \quad (3)$



Hình 1

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có:

$$\frac{CD}{AB} \le \frac{1}{2}\left(\frac{IC}{IA} + \frac{ID}{IB}\right) \qquad (4)$$

$$\frac{BC}{AD} \le \frac{1}{2}\left(\frac{IB}{ID} + \frac{IC}{IA}\right) \qquad (5)$$

$$\frac{AD}{BC} \le \frac{1}{2}\left(\frac{IA}{IC} + \frac{ID}{IB}\right) \qquad (6)$$

Dấu bằng trong (4), (5), (6) xảy ra tương ứng khi $\frac{IC}{IA} = \frac{ID}{IB}, \frac{IB}{ID} = \frac{IC}{IA}, \frac{IA}{IC} = \frac{ID}{IB}$.

Cộng từng vế của (3),(4), (5), (6) ta được điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi IA = IB = IC = ID ⇔ ABCD là hình chữ nhật.

Nhận xét: Trong bài toán trên, mặc dù dấu của bất đẳng thức cần chứng minh là ≤, trong khi cả hai vế của bất đẳng thức đều ở dạng tổng của các hạng tử. Chìa khoá để giải quyết bài toán ở đây chính là việc chuyển đổi mỗi hạng tử của vế trái thành dạng căn bậc hai của một tích ($\frac{AB}{CD} = \sqrt{\frac{AI}{DI}\frac{BI}{CI}}$, …), từ đó áp dụng bất đẳng thức Côsi chứng minh được mỗi hạng tử đó của vế trái ≤ một nửa tổng hai hạng tử của vế phải. Vì vậy, việc linh hoạt biến đổi bài toán để áp dụng được bất đẳng thức Côsi trong những trường hợp cụ thể là rất cần thiết, đòi hỏi ở người làm toán sự tư duy, tìm tòi và sáng tạo.

<u>Bài 2</u>: Cho tam giác nhọn ABC. Vẽ ba chiều cao AA_1, BB_1, CC_1; ba trung tuyến AA_2, BB_2, CC_2. Giả sử $AA_2 \cap BB_1 = P$, $BB_2 \cap CC_1 = Q$, $CC_2 \cap AA_1 = R$. Chứng minh rằng: $\frac{AP}{PA_2} + \frac{BQ}{QB_2} + \frac{CR}{RC_2} \ge 6$

Chứng minh:

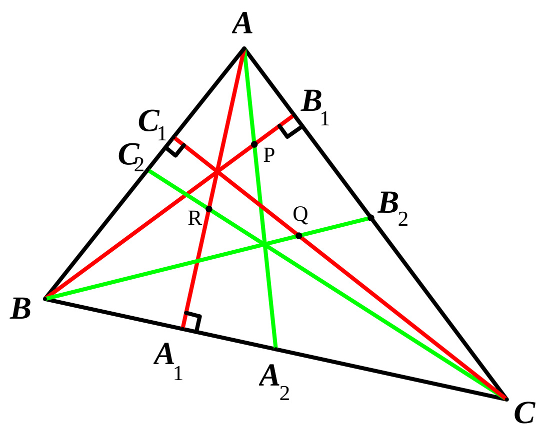
Áp dụng định lý Menelauyt trong tam giác AA_2C với đường thẳng BRB_1, ta có:

$$\frac{AP}{PA_2}\cdot\frac{A_2B}{BC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

Suy ra: $$\frac{AP}{PA_2}=\frac{BC}{A_2B}\cdot\frac{B_1C}{A_2B} \qquad (1)$$

Do AA_2 là trung tuyến nên $BC = 2.A_2B$,

và vì $BB_1 \perp AC$ nên $\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{BB_1.\text{cotg}A}{BB_1.\text{cotg}C}=\frac{\text{tg}C}{\text{tg}A}$



Hình 2

Vậy từ (1) $\Rightarrow$ $\frac{AP}{PA_2}=2.\frac{\text{tg}C}{\text{tg}A}$.

Hoàn toàn tương tự, ta có:

$$\frac{BQ}{QB_2}=2.\frac{\text{tg}A}{\text{tg}B},\ \frac{CR}{RC_2}=2.\frac{\text{tg}B}{\text{tg}C}$$

Từ đó: $$\frac{AP}{PA_2}+\frac{BQ}{QB_2}+\frac{CR}{RC_2}=2.\left(\frac{\text{tg}C}{\text{tg}A}+\frac{\text{tg}A}{\text{tg}B}+\frac{\text{tg}B}{\text{tg}C}\right)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Côsi, thì:

$$\frac{\text{tg}C}{\text{tg}A}+\frac{\text{tg}A}{\text{tg}B}+\frac{\text{tg}B}{\text{tg}C}\geq 3.\sqrt[3]{\frac{\text{tg}C}{\text{tg}A}\cdot\frac{\text{tg}A}{\text{tg}B}\cdot\frac{\text{tg}B}{\text{tg}C}}=3$$

Vậy: $\frac{AP}{PA_2}+\frac{BQ}{QB_2}+\frac{CR}{RC_2}\geq 6$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{\text{tg}C}{\text{tg}A}=\frac{\text{tg}A}{\text{tg}B}=\frac{\text{tg}B}{\text{tg}C}$, tức là tam giác ABC đều.

Bài 3: Cho điểm M nằm trên đoạn thẳng AB. Vẽ về một phía của AB các tia Ax, By vuông góc với AB. Qua M có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự ở C, D. Xác định vị trí của các điểm C, D sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải: (Hình 3)

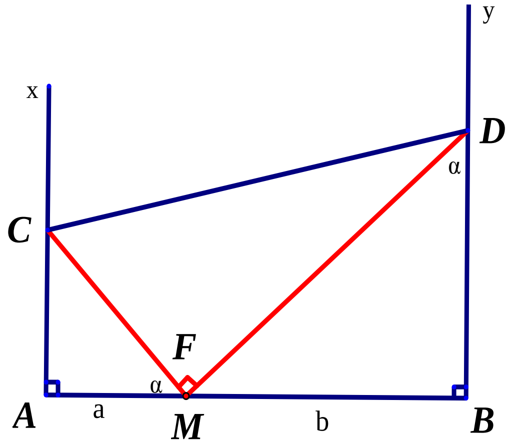
Ta có: $S_{MCD} = \frac{1}{2}MC.MD$

Đặt : $MA = a, MB = b, \widehat{AMC} = \widehat{BDM} = \alpha$

Khi đó $MC = \frac{a}{\cos\alpha}, MD = \frac{b}{\sin\alpha}$

Nên: $S_{MCD} = \frac{1}{2}.\frac{ab}{\sin\alpha\cos\alpha}$

Do a, b là hằng số nên S_{MCD} nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $2\sin\alpha\cos\alpha$ lớn nhất.



Hình 3

Theo bất đẳng thức Côsi: $2\sin\alpha\cos\alpha \le \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Nên $S_{MCD} \ge ab$. Dấu bằng xảy ra khi $\sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^0$

Như vậy *Min* $S_{MCD} = ab$. Điểm C, D được xác định thứ tự trên các tia Ax, By sao cho AC = AM, BD = BM.

Nhận xét: Điểm sáng tạo trong cách giải trên là ta đã chọn biến là các tỉ số lượng giác $\sin\alpha$, $\cos\alpha$. Giữa $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ có liên hệ bởi BĐT Côsi: $x^2 + y^2 \ge 2xy$.

<u>Bài 4</u>: Cho tam giác ABC, điểm M di chuyển trên cạnh BC. Qua M kẻ các đường thẳng song song với AC và AB, chúng cắt AB và AC theo thứ tự ở D, E. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình bình hành ADME có diện tích lớn nhất.

Lời giải:

<u>Cách 1</u> :

Ta thấy S_{ADME} lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{S_{ADME}}{S_{ABC}}$ lớn nhất.

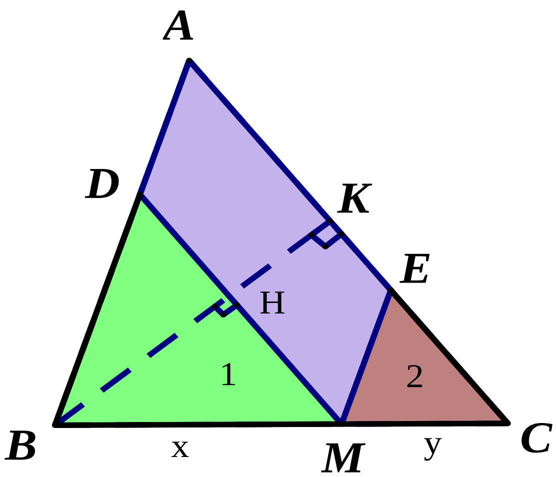
Kẻ $BK \perp AC$, cắt MD ở H.

$S_{ADME} = MD.HK$, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BK$

Suy ra: $\frac{S_{ADME}}{S_{ABC}} = 2.\frac{MD}{AC}.\frac{HK}{BK}$

Đặt MB = x, MC = y, ta có:

$\frac{MD}{AC} = \frac{BM}{BC} = \frac{x}{x+y}, \frac{HK}{BK} = \frac{MC}{BC} = \frac{y}{x+y}$



Hình 4

Do đó : $\frac{S_{ADME}}{S_{ABC}} = \frac{2xy}{(x+y)^2}$ (*)

Theo bất đẳng thức Côsi: $x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow \frac{2xy}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{2}$ (**)

Từ (*) và (**), ta được: $\frac{S_{ADME}}{S_{ABC}} \leq \frac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = y.

Như vậy *max* $S_{ADME} = \frac{1}{2} S_{ABC}$, khi đó M là trung điểm của BC.

Cách 2: Ký hiệu $S_{ABC} = S$, $S_{DBM} = S_1$, $S_{EMC} = S_2$.

Rõ ràng S_{ADME} lớn nhất $\Leftrightarrow S_1 + S_2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{S_1+S_2}{S}$ nhỏ nhất.

Vì các tam giác DBM và EMC cùng đồng dạng với tam giác ABC nên:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{BM}{BC}\right)^2, \quad \frac{S_2}{S} = \left(\frac{MC}{BC}\right)^2$$

Suy ra: $\frac{S_1+S_2}{S} = \frac{BM^2+MC^2}{BC^2} = \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{2}$. Như vậy $S_1 + S_2 \geq \frac{1}{2} S$ nên $S_{ADME} \leq \frac{1}{2} S$. Xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow$ x = y.

Kết luận: *max* $S_{ADME} = \frac{1}{2} S_{ABC}$, khi đó M là trung điểm của BC.

Nhận xét: Ở cách 1, ta đã xét một biểu thức trung gian, đó là tỉ số giữa diện tích hình bình hành ADME và diện tích tam giác ABC, bất đẳng thức Côsi dạng $\frac{xy}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{4}$. Còn ở cách 2, ta cũng xét biểu thức trung gian đó là tỉ số giữa tổng diện tích của các tam giác DBM, EMC và diện tích tam giác ABC, vì vậy lại áp dụng bất đẳng thức Côsi dạng $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{2}$. Qua đây cho thấy, cùng một bài toán, nhưng với cách khai thác khác nhau thì việc vận dụng bất đẳng thức Côsi sẽ ở những dạng khác nhau. Vấn đề là đòi hỏi ở người làm toán khả năng vận dụng linh hoạt, hợp lý để đạt được mục đích cụ thể.

Dưới đây là hai bài toán, vẫn là bài toán cực trị hình học nhưng ta lại vận dụng bất đẳng thức Côsi ở khía cạnh khác. Với hai số dương x, y có tổng x + y không đổi, thì tích xy đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi x = y. Ngược lại nếu tích xy không đổi thì tổng x + y đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi x = y.

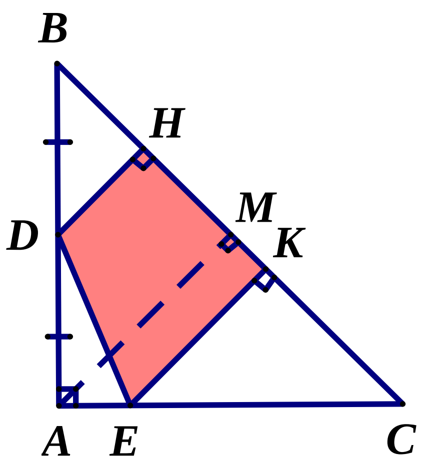
<u>Bài 5</u>: Cho tam giác ABC vuông cân có cạnh huyền BC = a. Gọi D là trung điểm của AB. Điểm E di chuyển trên cạnh AC. Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D, E đến BC. Tính diện tích lớn nhất của hình thang DEKH. Khi đó hình thang trở thành hình gì?

Lời giải (Hình 5)

Ta có: $2S_{DEKH} = (DH+EK).HK = (BH+KC).HK$

Ta thấy tổng (BH+KC) + HK không đổi (bằng BC = a cho trước) nên tích (BH+KC).HK lớn nhất khi và chỉ khi $BH+KC = HK = \frac{a}{2}$.

Do đó: $max\ S_{DEKH} = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$



Hình 5

Khi đó hình thang DEKH có đường cao HK= $\frac{a}{2}$ và nếu kẻ $AM \perp BC$ thì do tam giác ABC vuông cân tại A nên $MB = MC = \frac{a}{2}$, nên HB = HM = $\frac{a}{4}$

Vậy $KC = BC - BH - HK = a - \frac{a}{4} - \frac{a}{2} = \frac{a}{4}$

Khi đó DH = HB = $\frac{a}{4}$, EK = KC = $\frac{a}{4}$. Hình thang DEKH là hình chữ nhật, E là trung điểm của AC.

<u>Bài 6</u>: Hai anh em chia tài sản là một mảnh đất hình tam giác ABC. Họ muốn chia mảnh đất đó thành 2 miếng đất có diện tích bằng nhau bởi một bờ rào thẳng ngắn nhất. Tính độ dài m của bờ rào này theo diện tích S và góc nhỏ nhất α của tam giác.

Lời giải: (Hình 6)

Bờ rào phải cắt 2 cạnh của tam giác. Giả sử góc tại đỉnh A là nhỏ nhất, $\widehat{BAC} = \alpha$, độ dài bờ rào $IK = m$.

Gọi khoảng cách từ đỉnh A tới hai đầu bờ rào là x, y .

Ta có: $IK^2 = x^2 + y^2 - 2xy.\cos A$ (*)

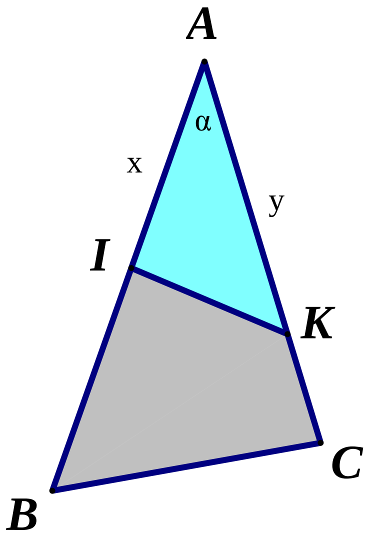
Đặt $S_{ABC} = S$, $S_{AIK} = S'$ thì $S' = \frac{S}{2}$ không đổi.

Mặt khác, $S' = \frac{1}{2}xy.\sin A$, mà S′ và $\hat{A}$ không đổi nên xy không đổi. Từ (*) ta thấy:

IK nhỏ nhất $\Leftrightarrow x^2 + y^2$ nhỏ nhất.

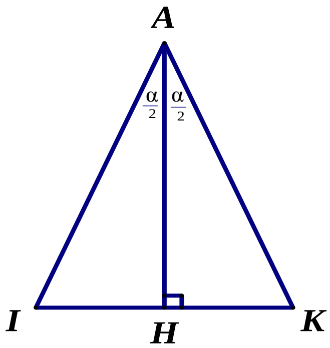
Theo bất đẳng thức Côsi: $x^2 + y^2 \geq 2xy$ (hằng số)

Vậy $x^2 + y^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = y$.



Hình 6

Như vậy, xét bờ rào chắn góc A thì bờ rào ngắn nhất khi và chỉ khi tam giác AIK cân tại A. (**) Bây giờ ta tính độ dài bờ rào IK theo S và α.



Hình 6.1

Kẻ đường cao AH của tam giác cân AIK (hình 6.1)

Khi đó: $IH = AH.\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ suy ra $IK = m = 2AH.\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$

Mặt khác $2S' = IK.AH = m.AH$ nên $2.AH = \frac{4S'}{m}$

Vậy $m = \frac{4S'}{m}.\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow m^2 = 4S'.\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow m = 2\sqrt{S'\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$

Thay $S' = \frac{S}{2}$ thì $m = \sqrt{2S\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Kết luận: Bờ rào có độ dài ngắn nhất $m = \sqrt{2S\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$ với $\alpha = min\,(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$.

Nhận xét: Một tình huống của thực tế đã được giải quyết thuyết phục bằng Toán học. Nếu chỉ để chia mảnh đất hình tam giác đó thành 2 mảnh có diện tích bằng nhau thì quá đơn giản (chỉ cần bờ rào là một trong ba trung tuyến của tam giác là đủ), ở đây mục đích đặt ra là vừa phải chia đôi diện tích, vừa đảm bảo độ dài bờ rào thẳng là ngắn nhất. Trong cách giải ở trên, ta đã sử dụng công thức: $IK^2 = x^2 + y^2 - 2xy.\cos A$ để từ đó khẳng định tích xy không đổi, và sử dụng bất đẳng thức Côsi để tìm giá trị nhỏ nhất của IK.

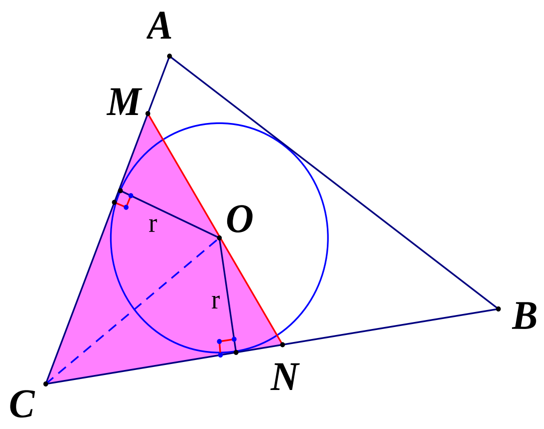
Bài toán thực tế trên có thể được khai thác trong việc chọn lọc, ra đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9 khá hay và phù hợp với việc kết hợp câu hỏi phụ " Chứng minh trong tam giác ABC, với độ dài AB = c, BC = a, AC = b, thì $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$".

Hoặc kết luận (**) trong lời giải trên cũng cho ta một bài toán " *Chứng minh rằng trong tam giác AIK có diện tích và số đo góc A không đổi, tam giác cân tại A có độ dài IK nhỏ nhất"*

Dưới đây là một ví dụ khác về việc khai thác bài toán gốc để cho ra những bài toán khác, tuỳ theo mục đích hỏi và đối tượng làm bài.

Bài 7: Cho đường tròn (O; r) nội tiếp tam giác ABC. Kẻ đường thẳng qua O cắt hai cạnh CA, CB của tam giác theo thứ tự ở M và N. Đường thẳng ở vị trí nào thì tam giác CMN có diện tích nhỏ nhất?

Lời giải:



Hình 7

Gọi S là diện tích ΔCMN, ta có :

$$S = S_{OCM} + S_{OCN} = \frac{1}{2}(CM + CN).r$$

Do đó: $\frac{S}{r} = \frac{1}{2}(CM + CN)$ (1)

Theo bất đẳng thức Côsi:

$\frac{1}{2}(CM + CN) \geq \sqrt{CM.CN}$ (2)

Mặt khác: $CM.CN \geq 2S$ (3)

Kết hợp (1), (2), (3) suy ra: $\frac{S}{r} = \frac{1}{2}(CM + CN) \geq \sqrt{CM.CN} \geq \sqrt{2S}$

hay $S \geq \sqrt{2S}.r \Leftrightarrow S^2 \geq 2S.r^2 \Leftrightarrow S \geq 2r^2$. Vậy S nhỏ nhất bằng $2r^2$ khi CM = CN.

Tam giác CMN cân đỉnh C có CO là phân giác nên $CO \perp MN$.

Kết luận: Đường thẳng $MN \perp CO$ tại O thì ΔCMN có diện tích nhỏ nhất.

Nhận xét: Có thể diễn đạt kết quả bài toán trên dưới dạng sau: Cho điểm O thuộc tia phân giác của góc C, một đường thẳng bất kì đi qua O cắt hai cạnh của góc C tại M và N. Tam giác CMN có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi CO là đường cao của tam giác.

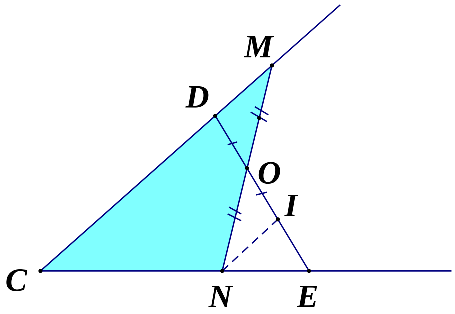
Cách khác: Cho điểm O thuộc tia phân giác của góc C, một đường thẳng bất kì đi qua O cắt hai cạnh của góc C tại M và N. Tam giác CMN có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi CO là trung tuyến của tam giác.

Ta còn có kết quả mạnh hơn bằng cách bỏ điều kiện O thuộc tia phân giác góc C: Cho điểm O nằm trong góc C, một đường thẳng bất kì đi qua O cắt hai cạnh của góc C tại M và N. Tam giác CMN có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi CO là trung tuyến của tam giác. Dưới đây là hai cách giải bài toán này:

Cách 1 : Xét ΔCMN nhận CO là trung tuyến và ΔCDE có DE đi qua O nhưng OD < OE (như hình vẽ 7.1). Lấy I trên đoạn OE sao cho OI = OD.

Ta có: ΔODM = ΔOIN (c.g.c)

=> $S_{ODM} = S_{OIN} \Leftrightarrow S_{CMN} < S_{CDE}$.



Hình 7.1

Cách 2: Qua O kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của góc C, tạo thành hình bình hành OHCK (như hình vẽ 7.2).

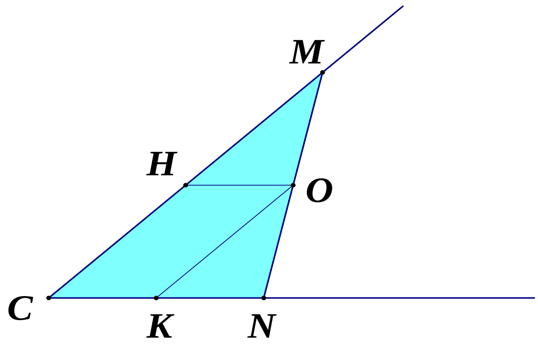
Theo kết quả **Bài 4**, ta có:

$$S_{OHCK} \le \frac{1}{2} S_{CMN}$$

$\Leftrightarrow$ $S_{CMN} \ge 2S_{OHCK}$.

Do góc C và điểm O cố định nên S_{OHCK} không đổi.

Vì vậy *min* $S_{CMN} = 2S_{OHCK}$, khi O là trung điểm của MN.



Hình 7.2

Để dựng điểm M, ta chỉ cần lấy M sao cho H là trung điểm của CM

Nhận xét: Qua những bài toán điển hình tôi đã lựa chọn ở trên, một số bài toán sẽ còn có những cách giải khác. Tuy nhiên, với việc khai thác linh hoạt và hợp lý vai trò của bất đẳng thức Côsi, cùng những kết quả khác của hình học, lời giải qua các ví dụ đó đã ngắn gọn và đẹp hơn. Đối với người học (đối tượng là HS giỏi Toán 9), thì có thể coi đây là những gợi ý, định hướng suy nghĩ và tìm tòi lời giải cho một số bài toán cực trị hình học. Còn đối với người dạy (GV), đây cũng có thể coi như những ý kiến tham khảo, trao đổi về việc khai thác bất đẳng thức Côsi trong việc đưa ra các bài toán cực trị hình học hay những bài toán giải quyết những vấn đề có ý nghĩa thực tiễn cuộc sống.

II. Phát triển bài toán hình học từ một bài toán gốc của đại số

Để mức độ khai thác bất đẳng thức Côsi sâu hơn, cao hơn; ta có thể sử dụng những bài toán gốc của Đại số, đó là một dạng cụ thể của bất đẳng thức Côsi, đã được chứng minh ở góc độ tổng quát, và đưa vào những bài toán chứng minh bất đẳng thức hình học. Muốn giải quyết được các bài toán này, đòi hỏi ở người làm toán khả năng phân tích và áp dụng khéo léo các kết quả đó.

Tiếp sau đây là một vài ví dụ cho ý tưởng trên.

Bài toán gốc: **Chứng minh rằng nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số dương, thì**

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

Chứng mih: Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \qquad (1)$$

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}} \qquad (2)$$

Do các vế của (1) và (2) đều là các số dương, nên nhân từng vế của hai bất đẳng thức trên, ta được: $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Trong nhiều bài toán, người ta thường sử dụng hai trường hợp riêng sau đây:

1. Với mọi a, b > 0, ta có: $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$
2. Với mọi a, b, c > 0, ta có : $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

Sau đây là ví dụ về việc sử dụng bài toán gốc đó trong một số bài toán cụ thể.

Bài 8.1 : Cho Δ ABC, O là điểm tuỳ ý trong tam giác. AO, BO, CO kéo dài cắt các cạnh đối diện thứ tự tại M, N, P. Chứng minh : $\frac{AO}{OM} + \frac{BO}{ON} + \frac{CO}{OP} \geq 6$.

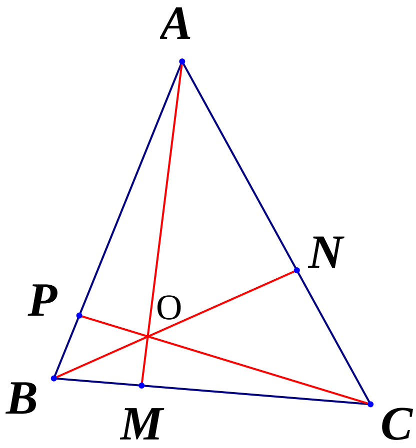
Lời giải : (Hình 8.1)

Theo định lý Seva, ta có :

$$\frac{MO}{MA}+\frac{NO}{NB}+\frac{PO}{PC}=1 \qquad (1)$$

Áp dụng kết quả bài toán gốc với trường hợp riêng thứ 2, ta có :

$$\left(\frac{MA}{MO}+\frac{NB}{NO}+\frac{PO}{PC}\right)\left(\frac{MO}{MA}+\frac{NO}{NB}+\frac{PO}{PC}\right)\geq 9 \qquad (2)$$



Hình 8.1

Kết hợp (1) và (2) suy ra : $\frac{MA}{MO}+\frac{NB}{NO}+\frac{PO}{PC}\geq 9$

$$\Leftrightarrow \frac{MO+AO}{MO}+\frac{NO+BO}{NO}+\frac{OP+CO}{OP}\geq 9$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{AO}{MO}+1+\frac{BO}{NO}+1+\frac{CO}{OP}\geq 9 \quad \Leftrightarrow \frac{AO}{MO}+\frac{BO}{NO}+\frac{CO}{OP}\geq 6$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{MO}{MA}=\frac{NO}{NB}=\frac{PO}{PC}$, mà $\frac{MO}{MA}+\frac{NO}{NB}+\frac{PO}{PC}=1$

Nên $\frac{MO}{MA}=\frac{NO}{NB}=\frac{PO}{PC}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$ M là trọng tâm Δ ABC.

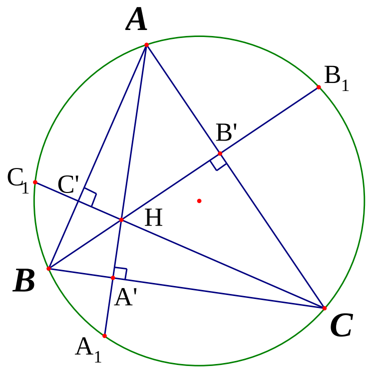
<u>Bài 8.2</u>: Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O). Ba chiều cao AA′, BB′, CC′ thứ tự cắt (O) tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng $\frac{AA'}{AA_1}+\frac{BB'}{BB_1}+\frac{CC'}{CC_1}\geq\frac{9}{4}$

Lời giải : Gọi H là trực tâm ΔABC (hình 8.2). Dễ thấy $A'H = A'A_1$, $B'H = B'B_1$, $C'H = C'C_1$

Theo bài toán gốc, ta có :

$$\left(\frac{AA'}{AA_1}+\frac{BB'}{BB_1}+\frac{CC'}{CC_1}\right).\left(\frac{AA_1}{AA'}+\frac{BB_1}{BB'}+\frac{CC_1}{CC'}\right)\geq 9 \qquad (*)$$

Xét $\frac{AA_1}{AA'}+\frac{BB_1}{BB'}+\frac{CC_1}{CC'}=3+\frac{A'H}{AA'}+\frac{B'H}{BB'}+\frac{C'H}{CC'}$



Hình 8.2

Mặt khác, theo định lí Sêva : $\frac{A'H}{AA'}+\frac{B'H}{BB'}+\frac{C'H}{CC'}=1$

Nên: $\frac{AA_1}{AA'}+\frac{BB_1}{BB'}+\frac{CC_1}{CC'}=3+1=4$

Khi đó, (*) $\Leftrightarrow \frac{AA'}{AA_1}+\frac{BB'}{BB_1}+\frac{CC'}{CC_1} \geq \frac{9}{4}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{AA_1}{AA'}=\frac{BB_1}{BB'}=\frac{CC_1}{CC'} \Leftrightarrow 1+\frac{A'A_1}{AA'}=1+\frac{B'B_1}{BB'}=1+\frac{C'C_1}{CC'}$.

$\Leftrightarrow \frac{A'H}{AA'}=\frac{B'H}{BB'}=\frac{C'H}{CC'} \Leftrightarrow$ H là trọng tâm của Δ ABC.

$\Leftrightarrow$ Δ ABC là tam giác đều.

* Nếu thay đổi giả thiết ba đường cao AA′, BB′, CC′ của bài toán trên thành ba đường trrung tuyến thì kết quả bài toán sẽ như thế nào ? Dấu $\geq \frac{9}{4}$ có còn đúng nữa không ? Ta tiếp tục xét bài toán sau :

Bài 8.3 : Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Ba trung tuyến AA′, BB′, CC′ lần lượt cắt (O) tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng :

$$\frac{AA'}{AA_1}+\frac{BB'}{BB_1}+\frac{CC'}{CC_1} \leq \frac{9}{4} \qquad (*)$$

Lời giải : Đặt AB = c, AC = b, BC = a.

Vì tứ giác ABA_1C nội tiếp (O), AA_1 cắt BC tại A′ nên: $AA'.A'A_1 = A'B.A'C = \frac{a^2}{4}$

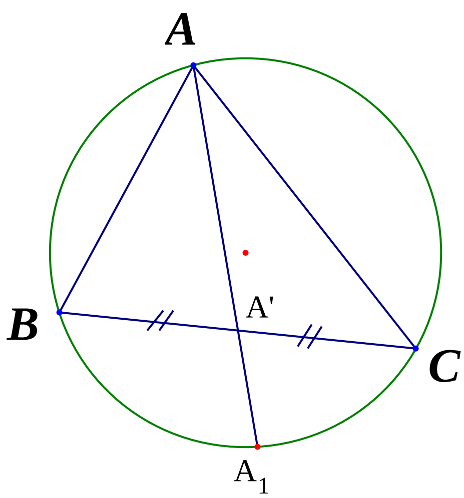
=> $AA'.AA_1 = AA'.(AA' + A'A_1)$

$$= AA'^2 + AA'.A'A_1 = AA'^2 + \frac{a^2}{4}$$

Mà AA′ là trung tuyến của Δ ABC nên:

$$AA'^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

Suy ra: $AA'.AA_1 = \frac{b^2+c^2}{2}$



Hình 8.3

Ta có:

$$\frac{AA'}{AA_1}=\frac{AA'^2}{AA'.AA_1}=\frac{1}{2}.\frac{2b^2+2c^2-a^2}{b^2+c^2}=1-\frac{a^2}{b^2+c^2} \qquad (1)$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$\frac{BB'}{BB_1}=1-\frac{b^2}{a^2+c^2} \quad (2) \qquad \text{và} \qquad \frac{CC'}{CC_1}=1-\frac{c^2}{a^2+b^2} \quad (3)$$

Kết hợp (1), (2), và (3) thì :

$$(*) \Leftrightarrow\ 3 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+c^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2}\right) \le \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+c^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \ge \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{a^2}{b^2+c^2} + 1 + \frac{b^2}{a^2+c^2} + 1 + \frac{c^2}{a^2+b^2} \ge \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\,(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{a^2+c^2} + \frac{1}{a^2+b^2}\right) \ge 9$$

$$\Leftrightarrow [\,(b^2 + c^2)+(a^2+ c^2) + (a^2 + b^2)].\left(\frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{a^2+c^2} + \frac{1}{a^2+b^2}\right) \ge 9\ (**)$$

Rõ ràng (**) đúng với bài toán gốc nêu ở trên. Do đó (*) đúng.

Dấu bằng trong (*) xảy ra khi và chỉ khi a = b = c, tức là Δ ABC đều.

Nhận xét:

Về mức độ, bài toán 8.3 yêu cầu cao hơn so với bài toán 8.2. Cũng là việc vận dụng bài toán gốc, nhưng được phát triển sâu hơn, cùng với học sinh phải biết được công thức trung tuyến (coi như một bài toán phụ): $m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

Cũng có thể học sinh dừng lại ở chỗ $\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+c^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \ge \frac{3}{2}$. Đây chính là nội dung của bất đẳng thức Nesbit (với n =3): $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \ge \frac{3}{2}$. Bất đẳng thức Nesbit được chứng minh qua kết quả của bài toán gốc nêu ở trên.

Dưới đây là một bài toán nữa, được coi như là "minh hoạ hình học" cho bất đẳng thức Nesbit.

<u>Bài 8.4</u>: Cho tam giác ABC. Vẽ ba phân giác AA′, BB′, CC′. Gọi a_1, b_1, c_1 tương ứng là các khoảng cách từ A′ đến AB, B′ đến BC, C′ đến CA. Gọi h_a, h_b, h_c tương ứng là ba chiều cao của tam giác kẻ từ A, B, C. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1}{h_a} + \frac{b_1}{h_b} + \frac{c_1}{h_c} \ge \frac{3}{2}$$

Lời giải:

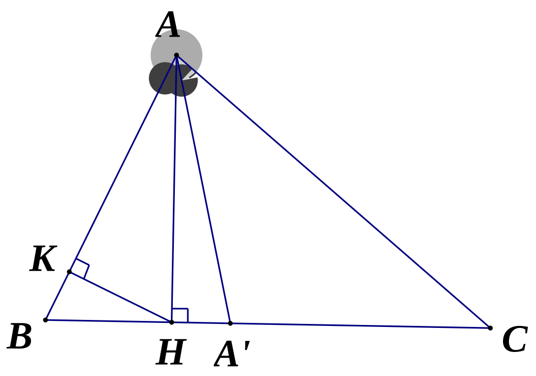
Kẻ $AH \perp BC$ và $A'K \perp AB$ (hình 8.4)

Theo đó, $AH = h_a$, $A'K = a_1$.

Trong $\Delta ABA'$ có :

$BA'.h_a = AB.a_1 = c.a_1$

Suy ra: $\frac{BA'}{c} = \frac{a_1}{h_a}$ (1)



Hình 8.4

Mặt khác, do AA′ là phân giác của ΔABC, nên : $\frac{BA'}{A'C} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{BA'}{BA'+A'C} = \frac{c}{b+c}$

$$\Rightarrow BA' = \frac{ac}{b+c} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$\frac{a_1}{h_a} = \frac{a}{b+c} \quad (3)$$

Hoàn toàn tương tự, ta có:

$$\frac{b_1}{h_b} = \frac{b}{c+a} \quad (4) \quad \text{và} \quad \frac{c_1}{h_c} = \frac{c}{a+b} \quad (5)$$

Cộng từng vế của (3), (4), (5), ta được:

$$\frac{a_1}{h_a} + \frac{b_1}{h_b} + \frac{c_1}{h_c} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

III. Một số bài tập đề xuất

Bài 9: M là một điểm di động trên đoạn thẳng AB cố định. Vẽ các hình vuông AMCD, BMEF. Xác định vị trí của M để tổng các diện tích hai hình vuông đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 10: Cho tam giác nhọn ABC coá các cạnh tương ứng a, b, c; đường cao AH = h. Hãy nội tiếp trong tam giác đó hình chữ nhật MNPQ có diện tích lớn nhất, với M thuộc AB, N thuộc AC, P và Q thuộc BC.

Bài 11: Cho góc nhọn xOy và một điểm A cố định nằm trong góc đó. M, N thứ tự là hai điểm trên các tia Ox, Oy sao cho 2.OM = ON. Tìm vị trí của M, N trên các tia đó sao cho 2.AM + AN đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 12: Cho tam giác ABC vuông tại A. Từ một điểm I nằm trong tam giác kẻ $IM \perp BC$, $IN \perp AC$, $IK \perp AB$. Xác định vị trí của điểm I sao cho $IM^2 + IN^2 + IK^2$ nhỏ nhất.

Bài 13: Cho hai đường tròn (O) và (O′) tiếp xúc ngoài tại A. Qua A vẽ hai tia vuông góc với nhau, cắt (O) và (O′) thứ tự tại B, C. Xác định vị trí của hai tia để diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Bài 14: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). G là trọng tâm của tam giác. Các trung tuyến xuất phát từ A, B, C lần lượt cắt (O) tại A_1, B_1, C_1. Xác định dạng của tam giác ABC để tổng $\frac{1}{GA_1}+\frac{1}{GB_1}+\frac{1}{GC_1}$ lớn nhất.

Bài 15: Cho đoạn thẳng AB = a và điểm M di động trên đoạn thẳng đó. Dựng về một phía của AB hai hình vuông AMCE và BMKQ.

a. Chứng minh AK, BC, QE đồng quy tại một điểm I

b. Xác định M trên đoạn AB để Δ AIB có chu vi lớn nhất? Diện tích lớn nhất?

Bài 16: Cho đoạn thẳng AB song song với đường thẳng d. M là một điểm thuộc nửa mặt phẳng bờ AB không chứa d (M không thuộc đoạn AB). Gọi C, D thứ tự là giao điểm của tia MA, MB với d. Tìm tập hợp các điểm M sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất.

Thi HSG Toán 9- Hà Nội năm 1999

Bài 17: Độ dài cạnh lớn nhất của một hình thang cân bằng 13cm, chu vi bằng 28 cm.

a. Tính các cạnh của hình thang biết diện tích bằng 27 cm^2.

b. Có tồn tại hay không một hình thang cân có các tính chất trên mà diện tích của nó bằng 27,001 cm^2?

Thi HSG - Tiệp Khắc năm 1980

Bài 18: Đường tròn (O, r) nội tiếp tam giác ABC chia mỗi cạnh của tam giác thành hai đoạn. Gọi x, y, z theo thứ tự là độ dài các đoạn tiếp tuyến xuất phát từ A, B, C. Gọi r_a, r_b, r_c thứ tự là bán kính các đường tròn bàng tiếp trong góc A, B, C. Gọi S là diện tích tam giác ABC.

a. Chứng minh: $r.r_a = yz$

b. Chứng minh: $S = \frac{xyz}{r}$

c. Chứng minh: $\frac{r_a+r_b+r_c}{r} = (x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})$

d. Trong các tam giác ngoại tiếp (O, r), tam giác nào có tổng các bán kính ba đường tròn bàng tiếp nhỏ nhất ?

Thi HSG bang NewYork (Mỹ) năm 1984

Bài 19 : Một đường tròn tiếp xúc ngoài với một nửa đường tròn tại điểm chính giữa của cung nửa đường tròn đó. Biết tổng của đường kính đường tròn và bán kính nửa đường tròn bằng 1. Tính tích lớn nhất có thể đạt được của diện tích hình tròn và nửa hình tròn nói trên.

Thi HSG bang NewYork (Mỹ) năm 1989

C - KẾT LUẬN

Trên đây là một số những suy nghĩ của tôi về việc vận dụng bất đẳng thức Côsi trong các bài toán bất đẳng thức và cực trị hình học. Những bài toán cực trị thường được gắn Toán học với thực tiễn, bởi việc đi tìm cái lớn nhất, nhỏ nhất, nhiều nhất, ít nhất… chính là đi tìm cái tối ưu thương được đặt ra trong đời sống và kỹ thuật. Đề tài này xin được dành cho đối tượng là các em học sinh giỏi Toán lớp 9 và các thầy cô giáo tham gia bồi dưỡng học sinh giỏi Toán bậc THCS. Với mong muốn được góp một phần nhỏ bé vào sự nghiệp bồi dưỡng và đào tạo nhân tài. Tôi xin cam đoan đây là đề tài do chính bản thân tôi nghiên cứu và thực hiện, nếu sai sự thật, tôi xin hoàn toàn chịu trách nhiệm. Trong quá trình thể hiện đề tài, bản thân đã rất nỗ lực và cố gắng, song do nhiều yếu tố nên chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót. Kính mong Hội đồng khoa học các cấp cùng các đồng nghiệp bổ sung thêm ý kiến đóng góp để đề tài được hoàn thiện hơn, thực sự hữu ích đối với những ai yêu Toán học.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Bình Minh, ngày 25 tháng 3 năm 2014

Người viết

Ý KIẾN ĐÁNH GIÁ CỦA HỘI ĐỒNG KHOA HỌC CẤP XÓM

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………

…, ngày tháng năm 2014

Chủ tịch hội đồng

Ý KIẾN ĐÁNH GIÁ CỦA HỘI ĐỒNG KHOA HỌC CẤP THÔN

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………

…, ngày tháng năm 2014

Chủ tịch hội đồng