TÍCH PHÂN HÀM ẨN – PHẦN 1

A. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1. TÍCH PHÂN CHO BỞI NHIỀU CÔNG THỨC

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 \text{ khi } x\le 0 \\ 4e^{2x}-3 \text{ khi } x\ge 0 \end{cases}$. Biết $\int_{-1}^{1} f(x)dx = ae^2-\frac{b}{c}$ với $a,b,c\in N^*$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a+b+c$.

A. 23. **B.** 27. **C.** 33. **D.** 42.

Lời giải

Ta có, $\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0}(x^2+x+1)dx+\int_{0}^{1}(4e^{2x}-3)dx=\frac{5}{6}+2e^2-5=2e^2-\frac{25}{6}$.

$\Rightarrow T=2+25+6=33$

Ví dụ 2. **[Đề tham khảo – 2018]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 5$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Lời giải

Cách 1: Trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$: $f(x)=\int\frac{2}{2x-1}dx=\ln(2x-1)+C_1$.

Lại có $f(1)=2\Rightarrow C_1=2$.

• Trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$: $f(x)=\int\frac{2}{2x-1}dx=\ln(1-2x)+C_2$.

Lại có $f(0)=1\Rightarrow C_2=1$.

Vậy $f(x)=\begin{cases}\ln(2x-1)+2 \text{ khi } x>\frac{1}{2} \\ \ln(1-2x)+1 \text{ khi } x<\frac{1}{2}\end{cases}$.

Suy ra $f(-1)+f(3)=3+\ln 15$.

Cách 2:

Ta có: $\begin{cases} f(0)-f(-1)=\int_{-1}^{0} f'(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{2dx}{2x-1}=\ln|2x-1|\Big|_{-1}^{0}=\ln\frac{1}{3} \quad (1) \\ f(3)-f(1)=\int_{1}^{3} f'(x)dx=\int_{1}^{3}\frac{2dx}{2x-1}=\ln|2x-1|\Big|_{1}^{3}=\ln 5 \quad (2)\end{cases}$

Lấy (2)-(1), ta được $f(3)-f(1)-f(0)+f(-1)=\ln 15\Rightarrow f(-1)+f(3)=3+\ln 15$.

2. TÍCH PHÂN HÀM ẨN

DẠNG 1. Điều kiện hàm ẩn có dạng:

1. $f'(x)=g(x).h(f(x))$

2. $f'(x).h(f(x))=g(x)$

Phương pháp giải:

1. $\frac{f'(x)}{h(f(x))}=g(x)\Leftrightarrow\int\frac{f'(x)}{h(f(x))}dx=\int g(x)dx\Leftrightarrow\int\frac{df(x)}{h(f(x))}=\int g(x)dx...$

2. $\int f'(x).h(f(x))dx=\int g(x)dx\Leftrightarrow\int h(f(x))df(x)=\int g(x)dx...$

Chú ý:

- **1** và **2** bản chất là một (cô lập các cụm $f(x), f'(x)$ sang một vế).
- Ngoài việc nguyên hàm cả hai vế, ta có thể tích phân hai về (tùy cách hỏi)
- $f'(x)$ phải để trên tử

Ví dụ 1. Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4<f(5)<5$. **B.** $2<f(5)<3$. **C.** $3<f(5)<4$. **D.** $1<f(5)<2$.

Lời giải

Cách 1:

Với điều kiện bài toán ta có

$$f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}(f'(x))}{f(x)}=\frac{1}{3}\int (3x+1)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(3x+1) \Leftrightarrow \ln f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C \Leftrightarrow f(x)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}.$$

Khi đó $f(1)=1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{4}{3}+C}=1 \Leftrightarrow C=-\frac{4}{3} \Rightarrow f(x)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}} \Rightarrow f(5)=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}} \approx 3,79 \in (3;4)$.

Vậy $3<f(5)<4$.

Cách 2:

Với điều kiện bài toán ta có

$$f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \int_1^5 \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_1^5 \frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln f(x)\Big|_1^5=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln\frac{f(5)}{f(1)}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow f(5)=f(1).\mathrm{e}^{\frac{4}{3}} \approx 3,79 \in (3;4).$$

Ví dụ 2. Cho $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1;4]$ thỏa mãn $x+2xf(x)=[f'(x)]^2, \forall x\in[1;4], f(1)=\frac{3}{2}$. Giá trị $f(4)$ bằng:

A. $\frac{391}{18}$ **B.** $\frac{361}{18}$ **C.** $\frac{381}{18}$ **D.** $\frac{371}{18}$

Lời giải

Biến đổi:

$$x+2xf(x)=[f'(x)]^2 \Leftrightarrow x(1+2f(x))=[f'(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^2}{1+2f(x)}=x \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x}.$$

$$\Rightarrow \int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx=\int_1^4 \sqrt{x}dx \Leftrightarrow \sqrt{1+2f(x)}\Big|_1^4=\frac{14}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+2f(4)}-2=\frac{14}{3} \Leftrightarrow f(4)=\frac{391}{18}.$$

Ví dụ 3. Cho $f(x)$ không âm thỏa mãn điều kiện $f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}$ và $f(0)=0$. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[1;3]$ là

A. 22 **B.** $4\sqrt{11}+\sqrt{3}$ **C.** $20+\sqrt{2}$ **D.** $3\sqrt{11}+\sqrt{3}$

Lời giải

Biến đổi:

$$f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1} \Leftrightarrow \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}=2x \Rightarrow \int \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx=\int 2xdx$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)+1}=x^2+C$$

Với $f(0)=0 \Rightarrow C=1 \Rightarrow \sqrt{f^2(x)+1}=x^2+1 \Rightarrow f^2(x)=x^4+2x^2=g(x)$

Ta có: $g'(x)=4x^3+4x>0, \forall x\in[1;3]$. Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $[1;3]$

Suy ra: $g(1)\le g(x)=f^2(x)\le g(3) \Rightarrow 3\le f^2(x)\le 99 \xrightarrow{f(x)\ge 0} \sqrt{3}\le f(x)\le 3\sqrt{11}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;3]} f(x)=\sqrt{3} \\ \underset{\sqrt{3}}{Max}\, f(x)=3\sqrt{11} \end{cases}$$

Chú ý: *Nếu không tìm được ra luôn* $\int \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx=\sqrt{f^2(x)+1}+C$ thì ta có thể sử dụng kĩ thuật vi phân hoặc đổi biến (bản chất là một)

+) Vi phân:

$$\int \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx=\int \frac{f(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}d\left(f(x)\right)=\frac{1}{2}\int \left(f^2(x)+1\right)^{\frac{-1}{2}}d\left(f^2(x)+1\right)=\sqrt{f^2(x)+1}+C$$

+ Đổi biến: Đặt $t=\sqrt{f^2(x)+1} \Rightarrow t^2=f^2(x)+1 \Rightarrow tdt=f(x)f'(x)dx$

Suy ra: $\int \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx=\int \frac{tdt}{t}=\int dt=t+C=\sqrt{f^2(x)+1}+C$

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x)\ne 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3).f^2(x)$ và $f(0)=\frac{-1}{2}$. Biết tổng $f(1)+f(2)+...+f(2017)+f(2018)=\frac{a}{b}$ với $a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{a}{b}<-1$. **B.** $\frac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=1010$. **D.** $b-a=3029$.

Lời giải

Biến đổi $f'(x)=(2x+3).f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3 \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int (2x+3)dx$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}=x^2+3x+C \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2+3x+C}$. Mà $f(0)=\frac{-1}{2}$ nên $C=2$.

Do đó $f(x)=-\frac{1}{x^2+3x+2}=-\frac{1}{(x+1)(x+2)}$.

Khi đó $\frac{a}{b}=f(1)+f(2)+...+f(2017)+f(2018)$

$$=-\left(\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{2018.2019}+\frac{1}{2019.2020}\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2020}\right)=\frac{-1009}{2020}.$$

Với điều kiện a,b thỏa mãn bài toán, suy ra: $\begin{cases} a=-1009 \\ b=2020 \end{cases} \Rightarrow b-a=3029$.

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN BÀI TẬP TỰ LUYỆN – BUỔI 7

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi sau học sinh cùng GV kiểm tra kết quả

1	A B C D	11	A B C D	21	A B C D	31	A B C D	41	A B C D
2	A B C D	12	A B C D	22	A B C D	32	A B C D	42	A B C D
3	A B C D	13	A B C D	23	A B C D	33	A B C D	43	A B C D
4	A B C D	14	A B C D	24	A B C D	34	A B C D	44	A B C D
5	A B C D	15	A B C D	25	A B C D	35	A B C D	45	A B C D
6	A B C D	16	A B C D	26	A B C D	36	A B C D	46	A B C D
7	A B C D	17	A B C D	27	A B C D	37	A B C D	47	A B C D
8	A B C D	18	A B C D	28	A B C D	38	A B C D	48	A B C D
9	A B C D	19	A B C D	29	A B C D	39	A B C D	49	A B C D
10	A B C D	20	A B C D	30	A B C D	40	A B C D	50	A B C D

Câu 1. **[Chuyên Thái Bình-Lần 5-2018]** Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 4-x & \text{khi } 1\le x\le 2\end{cases}$. Tính $\int\limits_0^2 f(x)dx$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}6x^2 & \text{khi } x\le 0\\ a-a^2x & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$ và $I=\int\limits_{-1}^4 f(x)dx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên a để $I+22\ge 0$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 3. **[Đề tham khảo – 2018]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 5$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Câu 4. **[Toán học tuổi trẻ số 6 – 2018]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x-1}$, $f(0)=2017$, $f(2)=2018$. Tính $S=f(3)-f(-1)$.

A. $S=1$. **B.** $S=\ln 2$. **C.** $S=\ln 4035$. **D.** $S=4$.

Câu 5. **[Lục Ngạn–Bắc Giang–2018]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{3}{3x-1}$, $f(0)=1$ và $f\left(\frac{2}{3}\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $3+5\ln 2$. **B.** $-2+5\ln 2$. **C.** $4+5\ln 2$. **D.** $2+5\ln 2$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{4}{x^2-4}$; $f(-3)=0$; $f(0)=1$ và $f(3)=2$. Tính giá trị biểu thức $P=f(-4)+f(-1)+f(4)$.

A. $P=3+\ln\frac{3}{25}$. **B.** $P=3+\ln 3$. **C.** $P=2+\ln\frac{5}{3}$. **D.** $P=2-\ln\frac{5}{3}$.

Câu 7. **[Chuyên Thái Bình – Lần 6 – 2018]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$; $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

A. $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2$. **B.** $1+\ln 80$. **C.** $1+\ln 2+\frac{1}{3}\ln\frac{4}{5}$. **D.** $1+\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}$.

Câu 8. **[Sở Bắc Giang – 2018]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$; $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Tính giá trị của biểu thức $P=f(0)+f(4)$.

A. $P=2+\ln\frac{3}{5}$. **B.** $P=1+\ln\frac{3}{5}$. **C.** $P=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$. **D.** $P=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$.

Câu 9. **[Sở Phú Thọ - 2018]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$; $f(-2)+f(2)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Tính $f(-2)+f(0)+f(4)=0$ được kết quả

A. $P=1+\ln\frac{6}{5}$. **B.** $P=-1+\ln\frac{6}{5}$. **C.** $P=1+\ln\frac{4}{5}$. **D.** $P=-1+\ln\frac{4}{5}$.

Câu 10. **[Chuyên Thái Bình – Lần 4 – 2018]** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{1}{1+\sin 2x}$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. Biết $F(0)=1$ và $F(\pi)=0$. Tính giá trị của biểu thức $P=F\left(-\frac{\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

A. $P=2-\sqrt{3}$. **B.** $P=0$. **C.** Không tồn tại. **D.** $P=1$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=-e^x.f^2(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính giá trị của $f(\ln 2)$.

A. $f(\ln 2)=\frac{2}{9}$. **B.** $f(\ln 2)=-\frac{2}{9}$. **C.** $f(\ln 2)=\frac{2}{3}$. **D.** $f(\ln 2)=\frac{1}{3}$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C), xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=(x.f(x))^2, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị (C) là.

A. $y=6x+30$. **B.** $y=-6x+30$. **C.** $y=36x-30$. **D.** $y=-36x+42$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[-1;1]$, thỏa mãn $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)+2f(x)=0$. Biết $f(1)=1$, tính $f(-1)$.

A. $f(-1)=e^{-2}$. **B.** $f(-1)=e^3$. **C.** $f(-1)=e^4$. **D.** $f(-1)=3$.

Câu 14. **[Sở Yên Bái – 2018]** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x)=x^4+x^2$. Biết $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2)=\frac{313}{15}$. **B.** $f^2(2)=\frac{332}{15}$. **C.** $f^2(2)=\frac{324}{15}$. **D.** $f^2(2)=\frac{323}{15}$.

Câu 15. **[Sở Nam Định – Lần 2 – 2018]** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$, biết $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0$ và $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$; $f(2)=\dfrac{1}{15}$. Tính $f(1)+f(2)+f(3)$.

A. $\dfrac{7}{15}$. **B.** $\dfrac{11}{15}$. **C.** $\dfrac{11}{30}$. **D.** $\dfrac{7}{30}$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f^6(x).f'(x)=12x+13$ và $f(0)=2$. Khi đó phương trình $f(x)=3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 1.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3).f^2(x)$ và $f(0)=\dfrac{-1}{2}$. Biết tổng $f(1)+f(2)+...+f(2017)+f(2018)=\dfrac{a}{b}$ với $a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{a}{b}<-1$. **B.** $\dfrac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=1010$. **D.** $b-a=3029$.

Câu 18. **[Chuyên Vinh – Lần 4 – 2017]** Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4<f(5)<5$. **B.** $2<f(5)<3$. **C.** $3<f(5)<4$. **D.** $1<f(5)<2$.

Câu 19. **[Quảng Xương I – Thanh Hóa – Lần 4 – 2018]** Cho $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1;4]$ thỏa mãn $x+2xf(x)=\left[f'(x)\right]^2, \forall x\in[1;4], f(1)=\dfrac{3}{2}$. Giá trị $f(4)$ bằng:

A. $\dfrac{391}{18}$ **B.** $\dfrac{361}{18}$ **C.** $\dfrac{381}{18}$ **D.** $\dfrac{371}{18}$

Câu 20. Cho $f(x)$ không âm thỏa mãn điều kiện $f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}$ và $f(0)=0$. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[1;3]$ là

A. 22 **B.** $4\sqrt{11}+\sqrt{3}$ **C.** $20+\sqrt{2}$ **D.** $3\sqrt{11}+\sqrt{3}$

Câu 21. **[Chuyên Tuyên Quang – Lần 2 – 2018]** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $\left(f'(x)\right)^2=e^x f(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $e-2$. **B.** $e-1$. **C.** e^2-2. **D.** e^2-1.

Câu 22. **[Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa – Lần 3 – 2018]** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và $f(1)=-2$. Tính $\int\limits_1^2 f(x)dx$.

A. $-\dfrac{1}{2}-\ln 2$. **B.** $-\dfrac{3}{2}-\ln 2$. **C.** $-1-\dfrac{\ln 2}{2}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\ln 2}{2}$.

Câu 23. **[Sở Đà Nẵng – 2018]** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[4;8]$ và $f(0)\neq 0$ với $\forall x\in[4;8]$. Biết rằng $\int\limits_4^8 \dfrac{\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^4}dx=1$ và $f(4)=\dfrac{1}{4}, f(8)=\dfrac{1}{2}$. Tính $f(6)$.

A. $\dfrac{5}{8}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN – PHẦN 1
LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. **[Chuyên Thái Bình-Lần 5-2018]** Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 4-x & \text{khi } 1\le x\le 2\end{cases}$. Tính $\int\limits_0^2 f(x)dx$.

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có, $\int\limits_0^1 f(x)\,dx+\int\limits_1^2 f(x)\,dx=\int\limits_0^1 3x^2\,dx+\int\limits_1^2 (4-x)\,dx=x^3\Big|_0^1+\left(4x-\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=1+\dfrac{5}{2}=\dfrac{7}{2}$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}6x^2 & \text{khi } x\le 0\\ a-a^2x & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$ và $I=\int\limits_{-1}^4 f(x)\mathrm{d}x$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên a để $I+22\ge 0$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Ta có

$$I=\int\limits_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^0 6x^2\mathrm{d}x+\int\limits_0^4 (a-a^2x)\mathrm{d}x=2x^3\Big|_{-1}^0+\left(ax-\frac{a^2x^2}{2}\right)\Big|_0^4=2+4a-8a^2.$$

$I+22\ge 0\Leftrightarrow 2+4a-8a^2+22\ge 0\Leftrightarrow 2a^2-a-6\le 0\Leftrightarrow -\dfrac{3}{2}\le a\le 2\xrightarrow{a\in\mathbb{Z}} a\in\{-1;0;1;2\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của a thỏa mãn.

Câu 3. **[Đề tham khảo – 2018]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 5$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Lời giải

Cách 1: Trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$: $f(x)=\int\dfrac{2}{2x-1}dx=\ln(2x-1)+C_1$.

Lại có $f(1)=2\Rightarrow C_1=2$.

• Trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$: $f(x)=\int\dfrac{2}{2x-1}dx=\ln(1-2x)+C_2$.

Lại có $f(0)=1\Rightarrow C_2=1$.

Vậy $f(x)=\begin{cases}\ln(2x-1)+2 \; khi \; x>\dfrac{1}{2}\\ \ln(1-2x)+1 \; khi \; x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Suy ra $f(-1)+f(3)=3+\ln 15$.

Cách 2:

Ta có: $\begin{cases}f(0)-f(-1)=\int\limits_{-1}^0 f'(x)dx=\int\limits_{-1}^0\dfrac{2dx}{2x-1}=\ln|2x-1|\,\Big|_{-1}^0=\ln\dfrac{1}{3} & (1)\\ f(3)-f(1)=\int\limits_1^3 f'(x)dx=\int\limits_1^3\dfrac{2dx}{2x-1}=\ln|2x-1|\,\Big|_1^3=\ln 5 & (2)\end{cases}$

Lấy (2)-(1), ta được $f(3)-f(1)-f(0)+f(-1)=\ln 15 \Rightarrow f(-1)+f(3)=3+\ln 15$.

Câu 4. **[Toán học tuổi trẻ số 6 – 2018]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x-1}$, $f(0)=2017$, $f(2)=2018$. Tính $S=f(3)-f(-1)$.

A. $S=1$. **B.** $S=\ln 2$. **C.** $S=\ln 4035$. **D.** $S=4$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln(|x-1|)+C$.

Theo giả thiết $f(0)=2017$, $f(2)=2018$ nên $\begin{cases} f(x)=\ln(|x-1|)+2017 & \text{khi } x<1 \\ f(x)=\ln(|x-1|)+2018 & \text{khi } x>1 \end{cases}$.

Do đó $S=f(3)-f(-1)=\ln 2+2018-\ln 2-2017=1$.

Cách 2:

Ta có: $\begin{cases} f(0)-f(-1)=\int_{-1}^{0} f'(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x-1}=\ln|x-1|\Big|_{-1}^{0}=\ln\frac{1}{2} \quad (1) \\ f(3)-f(2)=\int_{2}^{3} f'(x)dx=\int_{2}^{3}\frac{dx}{x-1}=\ln|x-1|\Big|_{2}^{3}=\ln 2 \quad (2) \end{cases}$

Lấy $(1)+(2)$, ta được

$f(3)-f(2)+f(0)-f(-1)=0 \Rightarrow \mathrm{S}=f(3)-f(-1)=f(2)-f(0)=1$.

Câu 5. **[Lục Ngạn–Bắc Giang–2018]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{3}{3x-1}$, $f(0)=1$ và $f\left(\frac{2}{3}\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $3+5\ln 2$. **B.** $-2+5\ln 2$. **C.** $4+5\ln 2$. **D.** $2+5\ln 2$.

Lời giải

Cách 1: Từ $f'(x)=\frac{3}{3x-1} \Rightarrow f(x)=\int \frac{3}{3x-1}\mathrm{dx}=\begin{cases} \ln|3x-1|+C_1 \text{ khi } \mathrm{x}\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right) \\ \ln|3x-1|+C_1 \text{ khi } \mathrm{x}\in\left(\frac{1}{3};+\infty\right) \end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases} f(0)=1 \\ f\left(\frac{2}{3}\right)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0+C_1=1 \\ 0+C_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} \ln|3x-1|+1 \text{ khi } \mathrm{x}\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right) \\ \ln|3x-1|+2 \text{ khi } \mathrm{x}\in\left(\frac{1}{3};+\infty\right) \end{cases}$.

Khi đó: $f(-1)+f(3)=\ln 4+1+\ln 8+2=3+\ln 32=3+5\ln 2$.

Cách 2: Ta có

$\begin{cases} f(0)-f(-1)=f(x)\Big|_{-1}^{0}=\int_{-1}^{0} f'(x)\mathrm{dx}=\int_{-1}^{0}\frac{3}{3x-1}\mathrm{dx}=\ln|3x-1|\Big|_{-1}^{0}=\ln\frac{1}{4} \quad (1) \\ f(3)-f\left(\frac{2}{3}\right)=f(x)\Big|_{\frac{2}{3}}^{3}=\int_{\frac{2}{3}}^{3} f'(x)\mathrm{dx}=\int_{\frac{2}{3}}^{3}\frac{3}{3x-1}\mathrm{dx}=\ln|3x-1|\Big|_{\frac{2}{3}}^{3}=\ln 8 \quad (2) \end{cases}$

Lấy $(2)-(1)$, ta được: $f(3)+f(-1)-f(0)-f\left(\frac{2}{3}\right)=\ln 32 \Rightarrow f(-1)+f(3)=3+5\ln 2$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{4}{x^2-4}$; $f(-3)=0$; $f(0)=1$ và $f(3)=2$. Tính giá trị biểu thức $P=f(-4)+f(-1)+f(4)$.

A. $P=3+\ln\frac{3}{25}$. **B.** $P=3+\ln 3$. **C.** $P=2+\ln\frac{5}{3}$. **D.** $P=2-\ln\frac{5}{3}$.

Lời giải

Từ $f'(x)=\frac{4}{x^2-4}\Rightarrow f(x)=\int\frac{4dx}{x^2-4}=\int\frac{4dx}{(x-2)(x+2)}$

$$=\begin{cases}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C_1 \text{ khi } x\in(-\infty;-2)\\ \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C_2 \text{ khi } x\in(-2;2)\\ \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C_3 \text{ khi } x\in(2;+\infty)\end{cases}$$

Ta có $\begin{cases}f(-3)=0\\ f(0)=1\\ f(2)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln 5+C_1=0\\ 0+C_2=1\\ \ln\frac{1}{5}+C_3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=-\ln 5\\ C_2=1\\ C_3=2+\ln 5\end{cases}$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|-\ln 5 & \text{khi } x\in(-\infty;-2)\\ \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+1 & \text{khi } x\in(-2;2)\\ \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+2+\ln 5 & \text{khi } x\in(2;+\infty)\end{cases}.$$

Khi đó $P=f(-4)+f(-1)+f(4)=\ln 3-\ln 5+\ln 3+1+\ln\frac{1}{3}+2+\ln 5=3+\ln 3$.

Câu 7. **[Chuyên Thái Bình – Lần 6 – 2018]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$; $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

A. $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2$. **B.** $1+\ln 80$. **C.** $1+\ln 2+\frac{1}{3}\ln\frac{4}{5}$. **D.** $1+\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}$.

Lời giải

$f'(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$

$$\Rightarrow f(x)=\int\frac{dx}{x^2+x-2}=\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)}=\begin{cases}\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_1 & \text{khi } x\in(-\infty;-2)\\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_2 & \text{khi } x\in(-2;1)\\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_3 & \text{khi } x\in(1;+\infty)\end{cases}$$

Do đó $f(-3)-f(3)=0\Rightarrow\frac{1}{3}\ln 4+C_1-\frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}-C_3\Rightarrow C_3=C_1+\frac{1}{3}\ln 10$.

Và $f(0)=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}+C_2=\frac{1}{3}\Rightarrow C_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2$.

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_1 & khi\quad x\in(-\infty;-2)\\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2 & khi\quad x\in(-2;1)\\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_1+\frac{1}{3}\ln 10 & khi\quad x\in(1;+\infty)\end{cases}.$$

Khi đó: $f(-4)+f(-1)-f(4)=\left(\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}+C_1\right)+\left(\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2\right)-\left(\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}+C_1+\frac{1}{3}\ln 10\right)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2$.

Câu 8. **[Sở Bắc Giang – 2018]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$; $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Tính giá trị của biểu thức $P=f(0)+f(4)$.

A. $P=2+\ln\frac{3}{5}$. **B.** $P=1+\ln\frac{3}{5}$. **C.** $P=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$. **D.** $P=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$.

Lời giải

$$f'(x)=\frac{1}{x^2-1}\Rightarrow\int\frac{dx}{x^2-1}=\int\frac{dx}{(x-1)(x+1)}=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_1 & khi\quad x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)\\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_2 & khi\quad x\in(-1;1)\end{cases}$$

.

Ta có $f(-3)+f(3)=0\Rightarrow\frac{1}{2}\ln 2+C_1+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+C_1=0\Rightarrow C_1=0$.

Và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2\Rightarrow\frac{1}{2}\ln 3+C_2+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}+C_2=2\Rightarrow C_2=1$.

Suy ra $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| & khi\quad x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)\\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+1 & khi\quad x\in(-1;1)\end{cases}$ $\Rightarrow P=f(0)+f(4)=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$.

Câu 9. **[Sở Phú Thọ - 2018]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$; $f(-2)+f(2)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Tính $f(-2)+f(0)+f(4)=0$ được kết quả

A. $P=1+\ln\frac{6}{5}$. **B.** $P=-1+\ln\frac{6}{5}$. **C.** $P=1+\ln\frac{4}{5}$. **D.** $P=-1+\ln\frac{4}{5}$.

Lời giải

$$f'(x)=\frac{2}{x^2-1}\Rightarrow f(x)=\int\frac{2dx}{x^2-1}=\int\frac{2dx}{(x-1)(x+1)}=\begin{cases}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_1\text{ khi }x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)\\ In\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_1\text{ khi }x\in(-1;1)\end{cases}$$

Ta có $f(-2)+f(2)=0 \Rightarrow \ln 3+C_1+\ln\frac{1}{3}+C_1=0 \Leftrightarrow C_1=0$.

và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2 \Rightarrow \ln 3+C_2+\ln\frac{1}{3}+C_2=2 \Leftrightarrow C_2=1$.

Suy ra: $f(x)=\begin{cases} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \text{ khi } x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty) \\ In\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+1 \text{ khi } x\in(-1;1) \end{cases}$

$\Rightarrow f(-3)+f(0)+f(4)=\ln 2+1+\ln\frac{3}{5}=1+\ln\frac{6}{5}$

Câu 10. **[Chuyên Thái Bình – Lần 4 – 2018]** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{1}{1+\sin 2x}$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. Biết $F(0)=1$ và $F(\pi)=0$. Tính giá trị của biểu thức $P=F\left(-\frac{\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

A. $P=2-\sqrt{3}$. **B.** $P=0$. **C.** Không tồn tại. **D.** $P=1$.

Lời giải

Cách 1: Biến đổi $y=\frac{1}{1+\sin 2x}=\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{1}{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$. Khi đó:

$$F(x)=\int\frac{dx}{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\begin{cases}\frac{1}{2}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C_1 \text{ khi } x\in\left(-\frac{5\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right)+k2\pi \\ \frac{1}{2}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C_2 \text{ khi } x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)+k2\pi\end{cases}\quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Ta có:

$$\begin{cases}F(0)=1\\F(\pi)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}+C_2=1\\\frac{1}{2}+C_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_2=\frac{1}{2}\\C_1=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2} \text{ khi } x\in\left(-\frac{5\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right)+k2\pi\\\frac{1}{2}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2} \text{ khi } x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)+k2\pi\end{cases}$$

Khi đó: $P=F\left(-\frac{\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\left(\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\tan\frac{7\pi}{6}-\frac{1}{2}\right)=1$.

Cách 2: Ta có $\begin{cases}F(0)-F\left(-\frac{\pi}{12}\right)=F(x)\Big|_{-\frac{\pi}{12}}^{0}=\int_{-\frac{\pi}{12}}^{0}\frac{dx}{1+\sin 2x} \quad (1)\\ F(\pi)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)=F(x)\Big|_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi}=\int_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi}\frac{dx}{1+\sin 2x} \quad (2)\end{cases}$

Lấy $(2)-(1)$, ta được: $F\left(-\frac{\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)+F(\pi)-F(0)=\int_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi}\frac{dx}{1+\sin 2x}-\int_{-\frac{\pi}{12}}^{0}\frac{dx}{1+\sin 2x}$

$\overset{casio}{\Leftrightarrow} F\left(-\frac{\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)-1=0\Rightarrow F\left(-\frac{\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)=1$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=-e^x.f^2(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính giá trị của $f(\ln 2)$.

A. $f(\ln 2)=\frac{2}{9}$. **B.** $f(\ln 2)=-\frac{2}{9}$. **C.** $f(\ln 2)=\frac{2}{3}$. **D.** $f(\ln 2)=\frac{1}{3}$.

Lời giải

$$f'(x)=-e^x.f^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=-e^x\Leftrightarrow\int_0^{\ln 2}\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=-\int_0^{1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^{\ln 2}\frac{\mathrm{d}f(x)}{f^2(x)}=-e^x\Big|_0^{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}\Big|_0^{\ln 2}=-1\Leftrightarrow\frac{1}{f(\ln 2)}-\frac{1}{f(0)}=1\Leftrightarrow\frac{1}{f(\ln 2)}=3\Leftrightarrow f(\ln 2)=\frac{1}{3}.$$

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C), xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=(x.f(x))^2,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị (C) là.

A. $y=6x+30$. **B.** $y=-6x+30$. **C.** $y=36x-30$. **D.** $y=-36x+42$.

Lời giải

$$f'(x)=(x.f(x))^2\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=x^2\Leftrightarrow\int_0^1\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^1\frac{\mathrm{d}f(x)}{f^2(x)}=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}\Big|_0^1=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{f(1)}-\frac{1}{f(0)}=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{f(1)}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow f(1)=6.$$

Từ $f'(x)=(x.f(x))^2\Rightarrow f'(1)=(1.f(1))^2=36$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần lập là $y=36x-30$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[-1;1]$, thỏa mãn $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)+2f(x)=0$. Biết $f(1)=1$, tính $f(-1)$.

A. $f(-1)=e^{-2}$. **B.** $f(-1)=e^3$. **C.** $f(-1)=e^4$. **D.** $f(-1)=3$.

Lời giải

Biến đổi:

$$f'(x)+2f(x)=0\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-2\Leftrightarrow\int_{-1}^{1}\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int_{-1}^{1}-2dx\Leftrightarrow\int_{-1}^{1}\frac{df(x)}{f(x)}=-4\Leftrightarrow\ln f(x)\big|_{-1}^{1}=-4$$

$$\ln\frac{f(1)}{f(-1)}=-4\Leftrightarrow\frac{f(-1)}{f(1)}=e^4\Leftrightarrow f(-1)=f(1).e^4=e^4.$$

Câu 14. **[Sở Yên Bái – 2018]** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x)=x^4+x^2$. Biết $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2)=\frac{313}{15}$. **B.** $f^2(2)=\frac{332}{15}$. **C.** $f^2(2)=\frac{324}{15}$. **D.** $f^2(2)=\frac{323}{15}$.

Lời giải

Ta có $f'(x).f(x)=x^4+x^2\Rightarrow\int_0^2 f'(x).f(x)\,dx=\int_0^2(x^4+x^2)\,dx$

$$\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)\,df(x)=\frac{136}{15}\Leftrightarrow\frac{f^2(x)}{2}\Big|_0^2=\frac{136}{15}$$

$$\frac{f^2(2)-4}{2}=\frac{136}{15}\Leftrightarrow f^2(2)=\frac{332}{15}.$$

Câu 15. **[Sở Nam Định – Lần 2 – 2018]** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$, biết $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0$ và $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$; $f(2)=\dfrac{1}{15}$. Tính $f(1)+f(2)+f(3)$.

A. $\dfrac{7}{15}$. **B.** $\dfrac{11}{15}$. **C.** $\dfrac{11}{30}$. **D.** $\dfrac{7}{30}$.

Lời giải

Biến đổi $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-2x-4\Rightarrow\int\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int(-2x-4)dx$

$\Leftrightarrow\int\dfrac{d(f(x))}{f^2(x)}=-x^2-4x+C\Leftrightarrow-\dfrac{1}{f(x)}=-x^2-4x+C\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x-C}$.

Với $f(2)=\dfrac{1}{15}\Rightarrow\dfrac{1}{15}=\dfrac{1}{12-C}\Rightarrow C=-3$, suy ra: $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$.

Khi đó: $f(1)+f(2)+f(3)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{7}{30}$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f^6(x).f'(x)=12x+13$ và $f(0)=2$. Khi đó phương trình $f(x)=3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 1.

Lời giải

Từ $f^6(x).f'(x)=12x+13\Rightarrow\int f^6(x).f'(x)dx=\int(12x+13)dx$

$\Leftrightarrow\int f^6(x)df(x)=6x^2+13x+C\Leftrightarrow\dfrac{f^7(x)}{7}=6x^2+13x+C\xrightarrow{f(0)=2}C=\dfrac{2}{7}$.

Suy ra: $f^7(x)=42x^2+91x+2$.

Từ $f(x)=3\Leftrightarrow f^7(x)=2187\Rightarrow42x^2+91x+2=2187\Leftrightarrow42x^2+91x-2185=0\,(*)$.

Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm trái dấu do $ac<0$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)\neq0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3).f^2(x)$ và $f(0)=\dfrac{-1}{2}$. Biết tổng $f(1)+f(2)+...+f(2017)+f(2018)=\dfrac{a}{b}$ với $a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{a}{b}<-1$. **B.** $\dfrac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=1010$. **D.** $b-a=3029$.

Lời giải

Biến đổi $f'(x)=(2x+3).f^2(x)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3\Leftrightarrow\int\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int(2x+3)dx$

$\Leftrightarrow-\dfrac{1}{f(x)}=x^2+3x+C\Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x^2+3x+C}$. Mà $f(0)=\dfrac{-1}{2}$ nên $C=2$.

Do đó $f(x)=-\dfrac{1}{x^2+3x+2}=-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$.

Khi đó $\dfrac{a}{b}=f(1)+f(2)+...+f(2017)+f(2018)$

$=-\left(\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+.....+\dfrac{1}{2018.2019}+\dfrac{1}{2019.2020}\right)$

$=-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+.....+\dfrac{1}{2018}-\dfrac{1}{2019}+\dfrac{1}{2019}-\dfrac{1}{2020}\right)=-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2020}\right)=\dfrac{-1009}{2020}$.

Với điều kiện a, b thỏa mãn bài toán, suy ra: $\begin{cases} a=-1009 \\ b=2020 \end{cases} \Rightarrow b-a=3029$.

Câu 18. **[Chuyên Vinh – Lần 4 – 2017]** Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4<f(5)<5$. **B.** $2<f(5)<3$. **C.** $3<f(5)<4$. **D.** $1<f(5)<2$.

Lời giải

Cách 1:

Với điều kiện bài toán ta có

$$f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)}=\frac{1}{3}\int (3x+1)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(3x+1) \Leftrightarrow \ln f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C \Leftrightarrow f(x)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}.$$

Khi đó $f(1)=1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{4}{3}+C}=1 \Leftrightarrow C=-\frac{4}{3} \Rightarrow f(x)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}} \Rightarrow f(5)=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\approx 3,79\in(3;4)$.

Vậy $3<f(5)<4$.

Chú ý: Các bạn có thể tính $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}$ bằng cách đặt $t=\sqrt{3x+1}$.

Cách 2:

Với điều kiện bài toán ta có

$$f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \int_1^5 \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_1^5 \frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln f(x)\Big|_1^5=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln\frac{f(5)}{f(1)}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow f(5)=f(1).\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\approx 3,79\in(3;4).$$

Câu 19. **[Quảng Xương I – Thanh Hóa – Lần 4 – 2018]** Cho $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1;4]$ thỏa mãn $x+2xf(x)=[f'(x)]^2, \forall x\in[1;4]$, $f(1)=\frac{3}{2}$. Giá trị $f(4)$ bằng:

A. $\frac{391}{18}$ **B.** $\frac{361}{18}$ **C.** $\frac{381}{18}$ **D.** $\frac{371}{18}$

Lời giải

Biến đổi:

$$x+2xf(x)=[f'(x)]^2 \Leftrightarrow x(1+2f(x))=[f'(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^2}{1+2f(x)}=x \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x}.$$

$$\Rightarrow \int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx=\int_1^4 \sqrt{x}dx \Leftrightarrow \sqrt{1+2f(x)}\Big|_1^4=\frac{14}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+2f(4)}-2=\frac{14}{3} \Leftrightarrow f(4)=\frac{391}{18}.$$

Chú ý: *Nếu không nhìn được ra luôn* $I=\int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx=\sqrt{1+2f(x)}\Big|_1^4=\sqrt{1+2f(4)}-2$ *thì ta có thể sử dụng kỹ thuật vi phân hoặc đổi biến (bản chất là một).*

+ Vi phân: $\int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx = \int_1^4 \frac{df(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}$

$= \frac{1}{2}\int_1^4 (1+2f(x))^{-\frac{1}{2}} d(1+2f(x)) = \sqrt{1+2f(x)}\Big|_1^4$.

+ Đổi biến: Đặt $t = \sqrt{1+2f(x)} \Rightarrow t^2 = 1+2f(x) \Leftrightarrow tdt = f'(x)dx$

với $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{1+2f(1)} = 2; x = 4 \Rightarrow t = \sqrt{1+2f(4)}$.

Khi đó $I = \int_2^{\sqrt{1+2f(4)}} \frac{tdt}{t} = \int_2^{\sqrt{1+2f(4)}} dt = t\Big|_2^{\sqrt{1+2f(4)}} = \sqrt{1+2f(4)} - 2$.

Câu 20. Cho $f(x)$ không âm thỏa mãn điều kiện $f(x).f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1}$ và $f(0) = 0$. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[1;3]$ là

A. 22 **B.** $4\sqrt{11}+\sqrt{3}$ **C.** $20+\sqrt{2}$ **D.** $3\sqrt{11}+\sqrt{3}$

Lời giải

Biến đổi:

$$f(x).f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1} \Leftrightarrow \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} = 2x \Rightarrow \int \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx = \int 2xdx$$

$\Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)+1} = x^2 + C$

Với $f(0) = 0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \sqrt{f^2(x)+1} = x^2+1 \Rightarrow f^2(x) = x^4 + 2x^2 = g(x)$

Ta có: $g'(x) = 4x^3 + 4x > 0, \forall x \in [1;3]$. Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $[1;3]$

Suy ra: $g(1) \le g(x) = f^2(x) \le g(3) \Rightarrow 3 \le f^2(x) \le 99 \xrightarrow{f(x)\ge 0} \sqrt{3} \le f(x) \le 3\sqrt{11}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;3]} f(x) = \sqrt{3} \\ \underset{\sqrt{3}}{Max}\, f(x) = 3\sqrt{11} \end{cases}$$

Chú ý: *Nếu không tìm được ra luôn* $\int \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx = \sqrt{f^2(x)+1} + C$ thì ta có thể sử dụng kĩ thuật vi phân hoặc đổi biến (bản chất là một)

+) Vi phân:

$$\int \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx = \int \frac{f(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}d(f(x)) = \frac{1}{2}\int (f^2(x)+1)^{\frac{-1}{2}} d(f^2(x)+1) = \sqrt{f^2(x)+1} + C$$

+ Đổi biến: Đặt $t = \sqrt{f^2(x)+1} \Rightarrow t^2 = f^2(x)+1 \Rightarrow tdt = f(x)f'(x)dx$

Suy ra: $\int \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx = \int \frac{tdt}{t} = \int dt = t + C = \sqrt{f^2(x)+1} + C$

Câu 21. **[Chuyên Tuyên Quang – Lần 2 – 2018]** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và $(f'(x))^2 = e^x f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $e-2$. **B.** $e-1$. **C.** e^2-2. **D.** e^2-1.

Lời giải

Biến đổi $(f'(x))^2 = e^x f(x) \Leftrightarrow \frac{(f'(x))^2}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{e^x} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = \int \sqrt{e^x}dx$

$\Leftrightarrow \int \left(f(x)\right)^{-\frac{1}{2}} df(x) = \int e^{\frac{x}{2}} dx \Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)} = 2e^{\frac{x}{2}} + C$

Vì $f(0)=1 \Rightarrow C=0 \Rightarrow \sqrt{f(x)} = e^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow f(x) = e^x$

Suy ra $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e-1$.

Câu 22. **[Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa – Lần 3 – 2018]** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $x^2 f^2(x) + (2x-1) f(x) = xf'(x) - 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ và $f(1) = -2$. Tính $\int_1^2 f(x)\,dx$.

A. $-\frac{1}{2} - \ln 2$. **B.** $-\frac{3}{2} - \ln 2$. **C.** $-1 - \frac{\ln 2}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2} - \frac{\ln 2}{2}$.

Lời giải

Ta có $x^2 f^2(x) + (2x-1) f(x) = xf'(x) - 1 \Leftrightarrow \left(xf(x)+1\right)^2 = f(x) + xf'(x) (*)$

Đặt $h(x) = f(x) + xf'(x) \Rightarrow h'(x) = f(x) + xf'(x)$, khi đó $(*)$ có dạng

$h^2(x) = h'(x) \Rightarrow \frac{h'(x)}{h^2(x)} = 1 \Rightarrow \int \frac{h'(x)}{h^2(x)} dx = \int 1 dx \Rightarrow \int \frac{dh(x)}{h^2(x)} = x + C \Leftrightarrow -\frac{1}{h(x)} = x + C$

$\Rightarrow h(x) = -\frac{1}{x+C} \Rightarrow xf(x) + 1 = -\frac{1}{x+C}$

Vì $f(1) = -2$ nên $-2+1 = -\frac{1}{1+C} \Rightarrow C = 0$

Khi đó $xf(x) + 1 = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$

Suy ra: $\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)\Big|_1^2 = -\frac{1}{2} - \ln 2$

Câu 23. **[Sở Đà Nẵng – 2018]** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[4;8]$ và $f(0) \neq 0$ với $\forall x \in [4;8]$. Biết rằng $\int_4^8 \frac{\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^4} dx = 1$ và $f(4) = \frac{1}{4}$, $f(8) = \frac{1}{2}$. Tính $f(6)$.

A. $\frac{5}{8}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

+) Xét $\int_4^8 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_4^8 \frac{df(x)}{f^2(x)} = -\frac{1}{f(x)}\Big|_4^8 = -\left(\frac{1}{f(8)} - \frac{1}{f(4)}\right) = -(2-4) = 2$.

+) Gọi k là một hằng số thực, ta sẽ tìm k để $\int_4^8 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} + k\right)^2 dx = 0$.

Ta có:

$\int_4^8 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} + k\right)^2 dx = \int_4^8 \frac{\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^4} dx + 2k\int_4^8 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx + k^2 \int_4^8 dx = 1 + 4k + 4k^2 = (2k+1)^2$.

Suy ra: $k = -\frac{1}{2}$ thì $\int_4^8 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} - \frac{1}{2}\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_4^6 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \frac{1}{2}\int_4^6 dx$

$$\Leftrightarrow \int_4^6 \frac{df(x)}{f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}\Big|_4^6 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(4)} - \frac{1}{f(6)} = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{f(6)} = 1 \Leftrightarrow f(6) = \frac{1}{3}.$$

Chú ý: $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ không được phép suy ra $f(x) = 0$, nhưng

$$\int_a^b f^{2k}(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

TÍCH PHÂN HÀM ẨN – PHẦN 2

A. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 2. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn : $A.f(x)+B.u'.f(u)+C.f(a+b-x)=g(x)$

+) Với $\begin{cases} u(a)=a \\ u(b)=b \end{cases}$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx=\dfrac{1}{A+B+C}\int\limits_a^b g(x)dx$.

+) Với $\begin{cases} u(a)=b \\ u(b)=a \end{cases}$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx=\dfrac{1}{A-B+C}\int\limits_a^b g(x)dx$.

Trong đề bài thường sẽ bị khuyết một trong các hệ số A,B,C.

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(a+b-x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)=6x^2f(x^3)-\dfrac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. 2. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 6.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức – Dạng 2)

Biến đổi $f(x)=6x^2f(x^3)-\dfrac{6}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow f(x)-2.3x^2.f(x^3)=-\dfrac{6}{\sqrt{3x+1}}$ với $A=1$, $B=-2$.

Áp dụng công thức ta có: $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+(-2)}\int\limits_0^1 -\dfrac{6}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x=4$.

Cách 2: (Dùng công thức biến đổi – nếu không nhớ công thức)

Từ $f(x)=6x^2f(x^3)-\dfrac{6}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1 3x^2f(x^3)\mathrm{d}x=-6\int\limits_0^1\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$

Đặt $u=x^3\Rightarrow du=3x^2\mathrm{d}x$; Với $x=0\Rightarrow u=0$ và $x=1\Rightarrow u=1$.

Khi đó $\int\limits_0^1 3x^2f(x^3)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(u)\mathrm{d}u=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ thay vào $(*)$, ta được:

$$\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-6\int\limits_0^1\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=6\int\limits_0^1\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x=4.$$

Ví dụ 2. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4xf(x^2)+3f(x-1)=\sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $I=\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $I=\dfrac{\pi}{20}$. **D.** $I=\dfrac{\pi}{16}$

Lời giải

Từ $4x.f(x^2)+3f(x-1)=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2\int\limits_0^1 2xf(x^2)\mathrm{d}x+3\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \quad (*)$

+) Đặt $u=x^2\Rightarrow \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$; Với $x=0\Rightarrow u=0$ và $x=1\Rightarrow u=1$.

Khi đó $\int_0^1 2xf(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \quad (1)$

+) Đặt $t = 1 - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$; Với $x = 0 \Rightarrow t = 1$ và $x = 1 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó $\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \quad (2)$

Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được:

$$2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + 3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{20}.$$

DẠNG 3. Điều kiện hàm ẩn $A.f(u(x)) + B.f(v(x)) = g(x)$

Phương pháp giải: Lần lượt đặt $t = u(x)$ và $t = v(x)$ để giải hệ phương trình hai ẩn (trong đó có ẩn $f(x)$) để suy ra hàm số $f(x)$ (nếu $u(x) = x$ thì chỉ cần đặt một lần $t = v(x)$).

Các kết quả đặc biệt:

Cho $A.f(ax+b) + B.f(-ax+c) = g(x)$ (với $A^2 \neq B^2$) khi đó $f(x) = \dfrac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right) - B.g\left(\frac{x-c}{-a}\right)}{A^2 - B^2}$ (*)

+)Hệ quả 1 của (*): $A.f(x) + B.f(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \dfrac{A.g(x) - B.g(-x)}{A^2 - B^2}$

+)Hệ quả 2 của (*): $A.f(x) + B.f(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \dfrac{g(x)}{A+B}$ với $g(x)$ là hàm số chẵn.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$. Tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(x)}{x}dx$.

A. $I = \frac{3}{2}$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = \frac{1}{2}$. **D.** $I = -1$.

Lời giải

Đặt, $t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t}$ khi đó điều kiện trở thành $f\left(\frac{1}{t}\right) + 2f(t) = \frac{3}{t} \Rightarrow 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}$.

Hay $4f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x}$, kết hợp với điều kiện $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$. Suy ra :

$$3f(x) = \frac{6}{x} - 3\mathrm{x} \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x^2} - 1 \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(x)}{x}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{2}{x^2} - 1\right)dx = \left(\frac{-2}{x} - x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 2. **(Sở Kiên Giang – 2018)** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x)dx$.

A. $I = -\frac{4}{15}$. **B.** $I = \frac{1}{15}$. **C.** $I = \frac{4}{75}$. **D.** $I = \frac{1}{25}$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức – theo góc nhìn dạng 2)

Với $2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x}$ ta có $A = 2; B = 3$.

Suy ra: $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2+3}\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx \overset{Casio}{=} 0,05(3) = \frac{4}{75}$.

Cách 2: (Dùng công thức – theo góc nhìn dạng 3)

Áp dụng kết quả của Dạng 3:

"Cho $A.f\left(ax+b\right)+B.f\left(-ax+c\right)=g\left(x\right)$ (Với $A^2\neq B^2$) khi đó

$$f\left(x\right)=\frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right)-B.g\left(\frac{x-c}{-a}\right)}{A^2-B^2}$$".

Ta có: $2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)=x\sqrt{1-x}=g\left(x\right)\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{2g\left(x\right)-3g\left(1-x\right)}{2^2-3^2}$

$=\frac{2x\sqrt{1-x}-3\left(1-x\right)\sqrt{x}}{-5}$.

Suy ra: $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=\int\limits_0^1\frac{2x\sqrt{1-x}-3\left(1-x\right)\sqrt{x}}{-5}dx\overset{Casio}{=}0,05\left(3\right)=\frac{4}{75}$.

Cách 3: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

Từ $2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)=x\sqrt{1-x}\Rightarrow 2\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx+3\int\limits_0^1 f\left(1-x\right)dx=\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x}dx$

$\overset{Casio}{=}0,2\left(6\right)=\frac{4}{15}\left(*\right)$ Đặt $u=1-x\Rightarrow du=-dx$; Với $x=0\Rightarrow u=1$ và $x=1\Rightarrow u=0$.

Suy ra $\int\limits_0^1 f\left(1-x\right)dx=\int\limits_0^1 f\left(u\right)du=\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$ thay vào $\left(*\right)$, ta được:

$5\int\limits_0^2 f\left(x\right)dx=\frac{4}{15}\Leftrightarrow\int\limits_0^2 f\left(x\right)dx=\frac{4}{75}$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(-x\right)+2018f\left(x\right)=2x\sin x$. Tính giá trị của $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{2}{2019}$. **B.** $I=\frac{2}{1009}$. **C.** $I=\frac{4}{2019}$. **D.** $I=\frac{1}{1009}$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức – theo góc nhìn dạng 2)

Với $f\left(-x\right)+2018f\left(x\right)=2x\sin x$ ta có $A=1;B=2018$

Suy ra $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{1+2018}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x\mathrm{d}x\overset{Casio}{=}\frac{4}{2019}$

Cách 2: (Dùng công thức – theo góc nhìn dạng 3)

Áp dụng Hệ quả 2: $A.f\left(x\right)+Bf\left(-x\right)=g\left(x\right)\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{g\left(x\right)}{A+B}$ với $g\left(x\right)$ là hàm số chẵn.

Ta có $f\left(-x\right)+2018f\left(x\right)=2x\sin x\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{2x\sin x}{2019}$

$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{2019}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x\overset{Casio}{=}\frac{4}{2019}$

DẠNG 4. HÀM ẨN XÁC ĐỊNH BỞI ẨN DƯỚI CẬN TÍCH PHÂN

Phương pháp giải: Sử dụng công thức $\left(\int\limits_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt\right)' = u'.f(u) - v'.f(v)$

Kết quả đặc biệt: $\left(\int\limits_{a}^{u(x)} f(t)dt\right)' = u'.f(u)$ với a là hằng số.

Chứng minh: Giải sử $\int\limits_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt = F(t)\Big|_{v(x)}^{u(x)} = F(u(x)) - F(v(x))$

$$\Rightarrow \left(\int\limits_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt\right)' = \left(F(u(x)) - F(v(x))\right)' = u'.F'(u) - v'.F'(v) = u'.f'(u) - v'.f'(v)$$

Ví dụ 1. **[Lương Thế Vinh – Hà Nội – lần 3 – 2018]** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^{x^2} f(t)dt = e^{x^2} + x^4 - 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(4)$ là:

A. $f(4) = e^4 + 4$. **B.** $f(4) = 4e^4$. **C.** $f(4) = e^4 + 8$. **D.** $f(4) = 1$.

Lời giải

Sử dụng công thức $\left(\int\limits_a^{u(x)} f(t)dt\right)' = u'.f(u)$, ta có:

$$\int\limits_0^{x^2} f(t)dt = e^{x^2} + x^4 - 1 \Rightarrow \left(\int\limits_0^{x^2} f(t)dt\right)' = \left(e^{x^2} + x^4 - 1\right)'$$

$\Leftrightarrow 2xf(x^2) = 2x.e^{x^2} + 4x^3$.

Suy ra: $f(x^2) = e^{x^2} + 2x^2 \Rightarrow f(x) = e^x + 2x$

$\Rightarrow f(4) = e^4 + 8$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x) > 0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $g(x) = 1 + 2018\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t$ và $g(x) = f^2(x)$. Tính $\int\limits_0^1 \sqrt{g(x)}\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1011}{2}$ **B.** $\dfrac{1009}{2}$ **C.** $\dfrac{2019}{2}$ **D.** 505

Lời giải

Sử dụng công thức $\left(\int\limits_0^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' = u'.f(u)$, ta có

$$g(x) = 1 + 2018\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow g'(x) = 2018f(x) \xleftrightarrow[f(x)>0]{g(x)=f^2(x)} g'(x) = 2018\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} = 2018.$$

Suy ra $\int \dfrac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\mathrm{d}x = \int 2018\mathrm{d}x \Leftrightarrow 2\sqrt{g(x)} = 2018x + C\,(*)$

Từ điều kiện $g(x)=1+2018\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow g(0)=1$ thay vào (*) suy ra $C=2$.

Khi đó $\sqrt{g(x)}=1009x+1 \Rightarrow \int\limits_0^1 \sqrt{g(x)}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(1009x+1)\mathrm{d}x=\dfrac{1011}{2}$.

DẠNG 5. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(u(x))=v(x)$ và $v(x)$ là hàm đơn điệu (luôn đồng biến hoặc nghịch biến) trên $\mathbb{R}$. Hãy đi tính tích phân $I=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Phương pháp giải:

Đặt $t=u(x) \Rightarrow \begin{cases} dt=u'(x)dx \\ f(t)=v(x) \end{cases}$.

Ta viết lại $I=\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b f(t)dt$.

Đổi cận: Với $t=a \Rightarrow u(x)=a \Leftrightarrow x=\alpha$ và $t=b \Rightarrow b=u(x) \Leftrightarrow x=\beta$.

Khi đó $I=\int\limits_a^b f(t)dt=\int\limits_\alpha^\beta v(x).u'(x)dx$.

Ví dụ . Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x^3+3x+1)=3x+2, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_1^5 x.f'(x)dx$.

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{17}{4}$. **C.** $\dfrac{33}{4}$. **D.** -1761.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=f(x) \end{cases} \Rightarrow I=xf(x)\Big|_1^5-\int\limits_1^5 f(x)dx$.

Từ $f(x^3+3x+1)=3x+2 \Rightarrow \begin{cases} f(5)=5 \ (x=1) \\ f(1)=2 \ (x=0) \end{cases}$, suy ra $I=23-\int\limits_1^5 f(x)dx$.

Đặt $t=x^3+3x+1 \Rightarrow \begin{cases} dt=(3x^2+3)dx \\ f(t)=3x+2 \end{cases}$

Đổi cận: Với $t=1 \Rightarrow 1=x^3+3x+1 \Leftrightarrow x=0$ và $t=5 \Rightarrow x^3+3x+1=5 \Leftrightarrow x=1$.

Khi đó $I=23-\int\limits_1^5 f(x)dx=23-\int\limits_0^1(3x+2)(3x^2+3)dx \overset{Casio}{=} \dfrac{33}{4}$

DẠNG 6. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $g[f(x)]=x$ và $g(t)$ là hàm đơn điệu (luôn đồng biến hoặc nghịch biến) trên $\mathbb{R}$.Hãy tính tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$

Phương pháp giải: Đặt $y=f(x) \Rightarrow x=g(y) \Rightarrow dx=g'(y)dy$

Đổi cận $\begin{cases} x=a \to g(y)=a \Leftrightarrow y=\alpha \\ x=b \to g(y)=b \Leftrightarrow y=\beta \end{cases}$

Suy ra $I=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta yg(y)dy$

Ví dụ. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x)+f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^2 f(x)dx$

A. $I=2$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Lời giải

Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=y^3+y\Rightarrow dx=(3y^2+1)dy$

Đổi cận $\begin{cases}x=0\to y^3+y=0\Leftrightarrow y=0\\ x=2\to y^3+y=2\Leftrightarrow y=1\end{cases}$

Khi đó $I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 y(3y^2+1)dy=\int_0^1(3y^3+y)dy=\frac{5}{4}$

DẠNG 7. Cho $f(x).f(a+b-x)=k^2$, khi đó $I=\int\limits_a^b\frac{dx}{k+f(x)}=\frac{b-a}{2k}$

Chứng minh: Đặt $t=a+b-x\Rightarrow\begin{cases}dt=-dx\\ f(x)=\dfrac{k^2}{f(t)}\end{cases}$ và $x=a\Rightarrow t-b$; $x=b\Rightarrow t=a$.

Khi đó $I=\int\limits_a^b\frac{dx}{k+f(x)}=\int\limits_a^b\frac{dx}{k+\dfrac{k^2}{f(t)}}=\frac{1}{k}\int\limits_a^b\frac{f(x)dx}{k+f(x)}$.

$2I=\int\limits_a^b\frac{dx}{k+f(x)}+\frac{1}{k}\int\limits_a^b\frac{f(x)dx}{k+f(x)}=\frac{1}{k}\int\limits_a^b dx=\frac{1}{k}(b-a)\Rightarrow I=\frac{b-a}{2k}$.

Ví dụ. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x).f(1-x)=1$ với $\forall x\in[0;1]$. Tính giá trị của $I=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+f(x)}$.

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $t=1-x\Rightarrow\begin{cases}dt=-dx\\ f(x)=\dfrac{1}{f(t)}\end{cases}$ và $x=a\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=0$. Khi đó $I=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+f(x)}$

$=\int\limits_0^1\frac{dt}{1+\dfrac{1}{f(t)}}=\int\limits_0^1\frac{f(x)dx}{1+f(x)}$.

$2I=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+f(x)}+\int\limits_0^1\frac{f(x)dx}{1+f(x)}=\int\limits_0^1 dx=1\Rightarrow I=\frac{1}{2}$.

DẠNG 8. Cho $\begin{cases}f(a+b-x)=f(x)\\ \int\limits_a^b xf(x)dx=I\end{cases}\Rightarrow\int\limits_a^b f(x)dx=\frac{2I}{a+b}$.

Chứng minh: Đặt $t=a+b-x\Rightarrow\begin{cases}dt=-dx\\ x=a\Rightarrow t=b\\ x=b\Rightarrow t=a\end{cases}$. Khi đó

$I=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\int_a^b(a+b-t)\mathrm{f}(a+b-t)\mathrm{d}t=\int_a^b(a+b-x)f(a+b-x)\mathrm{d}x=\int_a^b(a+b-x)f(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $2I=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x+\int_a^b(a+b-x)f(x)\mathrm{d}x=(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2I}{a+b}$.

Ví dụ. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x)=f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=5$. Tính tích phân $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{11}{2}$.

Lời giải

Đặt $t=4-x\Rightarrow\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$ và $x=1\Rightarrow t=3$; $x=3\Rightarrow t=1$.

Khi đó: $5=\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=\int_1^3(4-t)f(4-t)\mathrm{d}t=\int_1^3(4-x)f(4-x)\mathrm{d}x=\int_1^3(4-x)f(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra: $10=\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x+\int_1^3(4-x)f(x)\mathrm{d}x=4\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{5}{2}$.

DẠNG 9. Tính tích phân $I=\int_a^b \max\{f(x);\,g(x)\}dx$ hoặc $I=\int_a^b \min\{f(x);\,g(x)\}dx$.

Ví dụ. Tính tích phân $I=\int_0^2 \max\{x;\,x^3\}dx$.

A. $\dfrac{17}{4}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{15}{4}$. **D.** $\dfrac{7}{4}$.

Lời giải

Trên đoạn $[0;\,2]$, xét $x\ge x^3\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)\le 0\xleftrightarrow{x\in[0;\,2]}0\le x\le 1$.

Vậy $\begin{cases}x\in[0;\,1]\Rightarrow x\ge x^3\\ x\in[1;\,2]\Rightarrow x\le x^3\end{cases}\Rightarrow\max\limits_{[0;\,2]}\{x;\,x^3\}=\begin{cases}x & khi\ 0\le x\le 1\\ x^3 & khi\ 1\le x\le 2\end{cases}$.

Suy ra $I=\int_0^2\max\{x;x^3\}dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2 x^3dx=\dfrac{1}{2}+\dfrac{15}{4}=\dfrac{17}{4}$.

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN BÀI TẬP TỰ LUYỆN – BUỔI 8

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi sau học sinh cùng GV kiểm tra kết quả

1	A B C D	11	A B C D	21	A B C D	31	A B C D	41	A B C D
2	A B C D	12	A B C D	22	A B C D	32	A B C D	42	A B C D
3	A B C D	13	A B C D	23	A B C D	33	A B C D	43	A B C D
4	A B C D	14	A B C D	24	A B C D	34	A B C D	44	A B C D
5	A B C D	15	A B C D	25	A B C D	35	A B C D	45	A B C D
6	A B C D	16	A B C D	26	A B C D	36	A B C D	46	A B C D
7	A B C D	17	A B C D	27	A B C D	37	A B C D	47	A B C D
8	A B C D	18	A B C D	28	A B C D	38	A B C D	48	A B C D
9	A B C D	19	A B C D	29	A B C D	39	A B C D	49	A B C D
10	A B C D	20	A B C D	30	A B C D	40	A B C D	50	A B C D

Câu 1. **[Trường Đức Thọ - Hà Tĩnh – 2018]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)=6x^2f(x^3)-\dfrac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. 2. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 6.

Câu 2. **[Chu Văn An – Hà Nội – 2018]** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4xf(x^2)+3f(x-1)=\sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $I=\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $I=\dfrac{\pi}{20}$. **D.** $I=\dfrac{\pi}{16}$

Câu 3. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)+f(2-x)=2x$. Tính giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^2 f(x)dx$.

A. $I=-4$. **B.** $I=\dfrac{1}{2}$. **C.** $I=\dfrac{4}{3}$. **D.** $I=2$.

Câu 4. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và thỏa mãn $f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$. Tính giá trị của tích phân $I=\int\limits_{-1}^2 f(x)dx$.

A. $I=5$. **B.** $I=\dfrac{5}{2}$. **C.** $I=3$. **D.** $I=15$.

Câu 5. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)=\sqrt{x+2}+xf(3-x^2)$. Tính giá trị của tích phân $I=\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x$

A. $I=\dfrac{14}{3}$. **B.** $I=\dfrac{28}{3}$. **C.** $I=\dfrac{4}{3}$. **D.** $I=2$.

Câu 6. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x)+xf(1-x^2)+3f(1-x)=\dfrac{1}{x+1}$. Tính giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{9}{2}\ln 2$. **B.** $I=\dfrac{2}{9}\ln 2$. **C.** $I=\dfrac{4}{3}$. **D.** $I=\dfrac{3}{2}$.

Câu 7. **[Chuyên Thái Nguyên – Lần 3 – 2018]** Cho hàm số $y=f(x)$ và thỏa mãn $f(x)-8x^3f(x^4)+\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0$. Tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)dx=\dfrac{a-b\sqrt{2}}{c}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{c};\dfrac{b}{c}$ tối giản. Tính $a+b+c$

A. 6. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -10.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2;\ln 2]$ và thõa mãn $f(x)+f(-x)=\dfrac{1}{e^x+1}$. Biết $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị của $P=a+b$.

A. $P=\dfrac{1}{2}$. **B.** $P=-2$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Câu 9. **[Chuyên Vinh- Lần 3 – 2018]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0$ và $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

Câu 10. **[Diễn Châu- Ngệ An- lần 3- 2018]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(1+2x)+f(1-2x)=\frac{x^2}{x^2+1},\forall x\in\mathbb{R}$. tính tích phân $I=\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

A. $I=2-\frac{\pi}{2}$. **B.** $I=1-\frac{\pi}{4}$. **C.** $I=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$. **D.** $I=\frac{\pi}{4}$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$. Tính $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx$.

A. $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=-1$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x)+2018f(x)=2x\sin x$. Tính giá trị của $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{2}{2019}$. **B.** $I=\frac{2}{1009}$. **C.** $I=\frac{4}{2019}$. **D.** $I=\frac{1}{1009}$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x)+2018f(x)=e^x$. Tính giá trị của $I=\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$

A. $I=\frac{e^2-1}{2019\mathrm{e}}$. **B.** $I=\frac{e^2-1}{2018\mathrm{e}}$. **C.** $I=0$. **D.** $I=\frac{e^2-1}{e}$.

Câu 14. **[Chuyên Hà Tĩnh – 2018]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x)+f(1-x)=12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y=2x+2$. **B.** $y=4x-6$. **C.** $y=2x-6$. **D.** $y=4x-2$.

Câu 15. **[Chuyên Thái Bình – Lần 6 – 2018]** Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)dx=2018$ và $g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g(x)+g(-x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

A. $I=2018$. **B.** $I=\frac{1009}{2}$. **C.** $I=4036$. **D.** $I=1008$.

Câu 16. **(Sở Kiên Giang – 2018)** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x)+3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)dx$.

A. $I=-\dfrac{4}{15}$. **B.** $I=\dfrac{1}{15}$. **C.** $I=\dfrac{4}{75}$. **D.** $I=\dfrac{1}{25}$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^{x^2} f(t)dt=x\cos(\pi x)$. Giá trị của $f(4)$ là:

A. $f(4)=1$. **B.** $f(4)=4$. **C.** $f(4)=\dfrac{1}{2}$. **D.** $f(4)=\dfrac{1}{4}$.

Câu 18. **[Lương Thế Vinh – Hà Nội – lần 3 – 2018]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^{x^2} f(t)dt=e^{x^2}+x^4-1$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(4)$ là:

A. $f(4)=e^4+4$. **B.** $f(4)=4e^4$. **C.** $f(4)=e^4+8$. **D.** $f(4)=1$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)>0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $g(x)=1+2018\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t$ và $g(x)=f^2(x)$. Tính $\int\limits_0^1 \sqrt{g(x)}\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1011}{2}$ **B.** $\dfrac{1009}{2}$ **C.** $\dfrac{2019}{2}$ **D.** 505

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[1;2]$. Biết $\int\limits_x^{x^2} f(t)\mathrm{d}t=2x^2+x-1$ với $\forall x\in[1;2]$. Tính tích phân $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=a+\dfrac{b}{c}\ln d$. Biết a,b,c,d đều là các số nguyên tố. Tính $T=a+b+c+d$.

A. $T=10$ **B.** $T=11$ **C.** $T=17$ **D.** $T=16$

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x^3+2x-2\right)=3x-1$. Tính $I=\int\limits_1^{10} f(x)dx$.

A. $I=\dfrac{45}{4}$. **B.** $I=\dfrac{9}{4}$. **C.** $I=\dfrac{135}{4}$. **D.** $I=\dfrac{27}{4}$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x^3+1\right)=2x-1, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_0^2 f(x)dx$.

A. $I=-2$. **B.** $I=\dfrac{5}{2}$. **C.** $I=-4$. **D.** $I=6$.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f\left(x^3+3x+1\right)=3x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_1^5 x.f'(x)dx$

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{17}{4}$. **C.** $\dfrac{33}{4}$. **D.** -1761.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x)+f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^2 f(x)dx$

A. $I=2$. **B.** $I=\dfrac{3}{2}$. **C.** $I=\dfrac{1}{2}$. **D.** $I=\dfrac{5}{4}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f^3(x)-3f^2(x)+6f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{5}{4}$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=\frac{5}{12}$. **D.** $I=\frac{5}{3}$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x+f^3(x)+2f(x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_{-2}^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{7}{4}$. **B.** $I=\frac{7}{2}$. **C.** $I=\frac{7}{3}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x).f(1-x)=1$ với $\forall x\in[0;1]$. Tính giá trị của $I=\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $f(x)>0$ và $f(0).f(2018-x)=1$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^{2018}\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

A. $I=2018$. **B.** $I=0$ **C.** $I=1009$ **D.** 4016

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x)=f(x)$. Biết $\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=5$. Tính tích phân $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)-f(3-x)=0$. Biết $\int\limits_{-1}^4 xf(x)\mathrm{d}x=2$. Tính $\int\limits_{-1}^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 31. Tính $I=\int\limits_0^2\min\left\{x;\sqrt[3]{2-x}\right\}\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=\frac{3}{4}$. **C.** $I=1$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Câu 32. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2\max\left\{x;\,x^3\right\}dx$.

A. $\frac{17}{4}$. **B.** 2. **C.** $\frac{15}{4}$. **D.** $\frac{7}{4}$.

Câu 33. Tính tích phân $I=\int\limits_0^3\max\left\{x^3;\,4x^2-3x\right\}dx$.

A. $\frac{117}{2}$. **B.** $\frac{707}{2}$. **C.** $\frac{275}{12}$. **D.** $\frac{119}{6}$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN – PHẦN 2
LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. **[Trường Đức Thọ - Hà Tĩnh – 2018]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)=6x^2f(x^3)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. 2. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 6.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức – Dạng 2)

Biến đổi $f(x)=6x^2f(x^3)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow f(x)-2.3x^2.f(x^3)=-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$ với $A=1$, $B=-2$.

Áp dụng công thức ta có: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{1+(-2)}\int_0^1 -\frac{6}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x=4$.

Cách 2: (Dùng công thức biến đổi – nếu không nhớ công thức)

Từ $f(x)=6x^2f(x^3)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int_0^1 3x^2f(x^3)\mathrm{d}x=-6\int_0^1\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$

Đặt $u=x^3 \Rightarrow du=3x^2\mathrm{d}x$; Với $x=0\Rightarrow u=0$ và $x=1\Rightarrow u=1$.

Khi đó $\int_0^1 3x^2f(x^3)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ thay vào $(*)$, ta được:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-6\int_0^1\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=6\int_0^1\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x=4.$$

Câu 2. **[Chu Văn An – Hà Nội – 2018]** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4xf(x^2)+3f(x-1)=\sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\frac{\pi}{4}$. **B.** $I=\frac{\pi}{6}$. **C.** $I=\frac{\pi}{20}$. **D.** $I=\frac{\pi}{16}$

Lời giải

Từ $4x.f(x^2)+3f(x-1)=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2\int_0^1 2xf(x^2)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \quad (*)$

+) Đặt $u=x^2 \Rightarrow \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$; Với $x=0\Rightarrow u=0$ và $x=1\Rightarrow u=1$.

Khi đó $\int_0^1 2xf(x^2)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \quad (1)$

+) Đặt $t=1-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$; Với $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \quad (2)$

Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được:

$$2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{20}.$$

Câu 3. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)+f(2-x)=2x$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$.

A. $I=-4$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=2$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức – Dạng 2)

Với $f(x)+f(2-x)=2x$ ta có $A=1$; $B=1$, suy ra: $I=\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{1+1}\int_0^2 2x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2$ $=2$.

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

Từ $f(x)+f(2-x)=2x \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f(2-x)dx=\int_0^2 2xdx=4$ (*)

Đặt $u=2-x \Rightarrow du=-dx$; Với $x=0 \Rightarrow u=2$ và $x=2 \Rightarrow u=0$.

Suy ra $\int_0^2 f(2-x)dx=\int_0^2 f(u)du=\int_0^2 f(x)dx$.

Thay vào (*), ta được $2\int_0^2 f(x)dx=4 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx=2$. **Chọn D**

Chú ý : Qua **Câu 1**, **Câu 2**, **Câu 3** ta có thể đưa ra dạng tổng quát cho **Dạng 2** như sau :

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn : $A.f(x)+B.u'.f(u)+C.f(a+b-x)=g(x)$

+) Với $\begin{cases}u(a)=a\\u(b)=b\end{cases}$ thì $\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{A+B+C}\int_a^b g(x)dx$.

+) Với $\begin{cases}u(a)=b\\u(b)=a\end{cases}$ thì $\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{A-B+C}\int_a^b g(x)dx$.

Trong đề bài thường sẽ bị khuyết một trong các hệ số A,B,C.

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì $\int_a^b f(a+b-x)dx=\int_a^b f(x)dx$.

Câu 4. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và thỏa mãn $f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_{-1}^2 f(x)dx$.

A. $I=5$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=3$. **D.** $I=15$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức – Dạng 2)

Với: $f(x)+(2x)f(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$. Ta có:

$A=1;B=1;C=3$ và $u=x^2-2$ thỏa mãn $\begin{cases}u(-1)=-1\\u(2)=2\end{cases}$.

Khi đó áp dụng công thức **(Xem phần chú ý sau lời giải Câu 3)** ta có:

$$I=\int_{-1}^{2} f(x)=\frac{1}{1+1+3}\int_{-1}^{2} 4x^3\mathrm{dx}=\left.\frac{x^4}{5}\right|_{-1}^{2}=3.$$

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

Từ $f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$.

$$\Rightarrow \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{dx}+\int_{-1}^{2} 2x.f(x^2-2)\mathrm{dx}+3\int_{-1}^{2} f(1-x)\mathrm{dx}=\int_{-1}^{2} 4x^3\mathrm{dx}=15 \quad (*)$$

+) Đặt $u=x^2-2\Rightarrow \mathrm{du}=2x\mathrm{dx}$; với $x=-1\Rightarrow u=-1$ và $x=2\Rightarrow u=2$.

Khi đó $\int_{-1}^{2} 2x.f(x^2-2)\mathrm{dx}=\int_{-1}^{2} f(u)\mathrm{du}=\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{dx} \quad (1)$

+) Đặt $t=1-x\Rightarrow \mathrm{dt}=-\mathrm{dx}$; Với $x=-1\Rightarrow t=2$ và $x=2\Rightarrow t=-1$.

Khi đó $\int_{-1}^{2} f(1-x)\mathrm{dx}=\int_{-1}^{2} f(t)\mathrm{dt}=\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{dx} \quad (2)$

Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được: $5\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{dx}=15\Rightarrow \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{dx}=3$.

Câu 5. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)=\sqrt{x+2}+xf(3-x^2)$.

Tính giá trị của tích phân $I=\int_{-1}^{2} f(x)dx$

A. $I=\frac{14}{3}$. **B.** $I=\frac{28}{3}$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=2$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức dạng 2).

Với $f(x)=\sqrt{x+2}+xf(3-x^2)\Rightarrow f(x)+\frac{1}{2}.(-2x).f(3-x^2)=\sqrt{x+2}$

$A=1;B=\frac{1}{2};C=0$ và $u=3-x^2$ thỏa mãn $\begin{cases}u(-1)=2\\u(2)=-1\end{cases}$

Khi đó áp dụng công thức (xem phần ***chú ý*** sau lời giải ***câu 3***) ta có:

$$I=\int_{-1}^{2} f(x)dx=\frac{1}{1-\frac{1}{2}+0}\int_{-1}^{2}\sqrt{x+2}dx=\frac{28}{3}.$$

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến).

Từ $f(x)-xf(3-x^2)=\sqrt{x+2}\Rightarrow \int_{-1}^{2} f(x)dx-\int_{-1}^{2} xf(3-x^2)dx=\int_{-1}^{2}\sqrt{x+2}dx=\frac{14}{3}$ (*)

Đặt $u=3-x^2\Rightarrow du=-2xdx$ với $\begin{cases}x=-1\Rightarrow u=2\\x=2\Rightarrow u=-1\end{cases}$

Khi đó $\int_{-1}^{2} xf(3-x^2)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2} f(u)du=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2} f(x)dx$ thay vào (*) ta được

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx-\frac{1}{2}\int_{-1}^{2} f(x)dx=\frac{14}{3}\Leftrightarrow \int_{-1}^{2} f(x)dx=\frac{28}{3}.$$

Câu 6. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x)+xf\left(1-x^2\right)+3f(1-x)=\dfrac{1}{x+1}$.

Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{9}{2}\ln 2$. **<u>B</u>.** $I=\dfrac{2}{9}\ln 2$. **C.** $I=\dfrac{4}{3}$. **D.** $I=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức – Dạng 2)

Với: $f(x)-\dfrac{1}{2}.(-2x)f\left(1-x^2\right)+3f(1-x)=2x$. Ta có:

$A=1;\ B=\dfrac{-1}{2};C=3$ và $u=x^2-2$ thỏa mãn $\begin{cases}u(0)=1\\u(1)=0\end{cases}$.

Khi đó áp dụng công thức (Xem phần ***Chú ý*** sau lời giải ***Câu 3***) ta có:

$$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)+3}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+1}=\frac{2}{9}\ln|x+1|\Big|_0^1=\frac{2}{9}\ln 2.$$

Cách 2: (Dùng công thức đổi biến nếu không nhớ công thức)

Từ $f(x)+xf\left(1-x^2\right)+3f(1-x)=\dfrac{1}{x+1}$

$$\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\ln|x+1|\Big|_0^1=\ln 2.\ (*)$$

+) Đặt $u=1-x^2\Rightarrow du=-2xdx$; Với $x=0\Rightarrow u=1$ và $x=1\Rightarrow u=0$.

Khi đó $\int_0^1 xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ (1).

+) Đặt $u=1-x\Rightarrow \mathrm{d}u=-\mathrm{d}x$; Với $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $\int_0^1 xf(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}t$ (2). Thay (1), (2) vào (*) ta được:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\ln 2\Rightarrow\frac{9}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\ln 2\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{9}\ln 2.$$

Câu 7. **[Chuyên Thái Nguyên – Lần 3 – 2018]** Cho hàm số $y=f(x)$ và thỏa mãn $f(x)-8x^3f\left(x^4\right)+\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0$. Tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{a-b\sqrt{2}}{c}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{c};\dfrac{b}{c}$ tối giản. Tính $a+b+c$

<u>A</u>. 6. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -10.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức – Dạng 2)

Biến đổi $f(x)-8x^3f(x^4)+\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0 \Leftrightarrow f(x)-2.(4x^3)f(x^4)=-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$ với $A=1;B=-2$

Áp dụng công thức ta có: $\int\limits_0^1 f(x)dx=\dfrac{1}{1+(-2)}\int\limits_0^1\left(-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\int\limits_0^1\dfrac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow tdt=xdx$; Với $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Khi đó: $\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}.xdx=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\dfrac{t^2-1}{t}.tdt=\int\limits_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)dt=\left(\dfrac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}=\dfrac{a-b\sqrt{2}}{c}$

Suy ra $a=2;b=1;c=3\Rightarrow a+b+c=6$.

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

Từ $f(x)-8x^3f(x^4)+\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx-2\int\limits_0^1 4x^3f(x^4)dx+\int\limits_0^1\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=0$ (*)

Đặt $u=x^4\Rightarrow du=4x^3dx$; Với $x=0\Rightarrow u=0$ và $x=1\Rightarrow u=1$.

Khi đó $\int\limits_0^1 4x^3f(x^4)dx=\int\limits_0^1 f(u)du=\int\limits_0^1 f(x)dx$ thay vào (*), ta được:

$\int\limits_0^1 f(x)dx-2\int\limits_0^1 f(x)dx+\int\limits_0^1\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow tdt=xdx$; Với $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Khi đó: $\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}.xdx=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\dfrac{t^2-1}{t}.tdt=\int\limits_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)dt=\left(\dfrac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}=\dfrac{a-b\sqrt{2}}{c}$

Suy ra $a=2;b=1;c=3\Rightarrow a+b+c=6$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2;\ln 2]$ và thõa mãn $f(x)+f(-x)=\dfrac{1}{e^x+1}$.

Biết $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị của $P=a+b$.

A. $P=\dfrac{1}{2}$. **B.** $P=-2$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Lời giải

Cách 1: Dùng công thức - Dạng 2.

Với $f(x)+f(-x)=\dfrac{1}{e^x+1}$ ta có $A=1;B=1$, suy ra $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+1}\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\dfrac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\dfrac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$

Cách 2: Dùng phương pháp dồn biến nếu không nhớ công thức

Từ $f(x)+f(-x)=\dfrac{1}{e^x+1}\Rightarrow \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\dfrac{\mathrm{d}x}{e^x+1}(*)$

Đặt $u=-x\Rightarrow \mathrm{d}u=-\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(u)\mathrm{d}u=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x$ thay vào $(*)$ ta được:

$2\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\dfrac{\mathrm{d}x}{e^x+1}\Leftrightarrow \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\dfrac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$

Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^x\mathrm{d}x$; Với $x=-\ln 2\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}, x=\ln 2\Rightarrow t=2$

$\Rightarrow \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\dfrac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\dfrac{e^x\mathrm{d}x}{e^x\left(e^x+1\right)}=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}=\ln\left|\dfrac{t}{t+1}\right|\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}=\ln 2$

Khi đó: $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln 2=a\ln 2+b\ln 3\xrightarrow{a,b\in\mathbb{Q}} a=\dfrac{1}{2}, b=0\Rightarrow P=a+b=\dfrac{1}{2}$.

Câu 9. **[Chuyên Vinh- Lần 3 – 2018]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0$ và $f(x)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx$ bằng

A. $-\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức theo góc nhìn dạng 2)

Với $f(x)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$, ta có $A=1;B=1$.

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\dfrac{1}{1+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos x.dx=\dfrac{1}{4}$.

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu nhớ công thức)

Từ $f(x)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos xdx=\dfrac{1}{2}$ (*)

Đặt $u=\dfrac{\pi}{2}-x\Rightarrow du=-dx$

Với $x=0\Rightarrow u=\dfrac{\pi}{2}; x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow u=0$.

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$, thay vào (*) ta được

$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\dfrac{1}{4}$ (1)

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ (*)

Từ điều kiện $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.\cos x$ suy ra

$\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = 0 \\ f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (2).

Thay (1), (2) vào (*), ta được $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx = -\frac{1}{4}$.

Câu 10. **[Diễn Châu- Ngệ An- lần 3- 2018]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(1+2x) + f(1-2x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R}$. tính tích phân $I = \int_{-1}^{3} f(x)dx$.

A. $I = 2 - \frac{\pi}{2}$. **B.** $I = 1 - \frac{\pi}{4}$. **C.** $I = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$. **D.** $I = \frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Đặt $t = 1 + 2x \Rightarrow 1 - 2x = 2 - t$ và $x = \frac{t-1}{2}$, khi đó điều kiện trở thành

$f(t) + f(2-t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 - 2t + 5} \Rightarrow f(x) + f(2-x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5}$ (*)

Cách 1: (Dùng công thức- theo góc nhìn dạng 2)

Với $f(x) + f(2-x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5}$ ta có $A = 1; B = 1$.

Suy ra $\int_{-1}^{3} f(x)dx = \frac{1}{1+1}\int_{-1}^{3} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5}dx \approx 0,429 = 2 - \frac{\pi}{2}$.

Cách 2: (Dùng công thức đổi biến – nếu nhớ công thức)

Từ (*), ta có $f(x) + f(2-x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5}$

$\Rightarrow \int_{-1}^{3} f(x)dx + \int_{-1}^{3} f(2-x)dx = \int_{-1}^{3} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5}dx$ (2*)

Đặt $u = 2 - x \Rightarrow du = -dx$. Với $x = -1 \Rightarrow u = 3; x = 3 \Rightarrow u = -1$.

Suy ra $\int_{-1}^{3} f(2-x)dx = \int_{-1}^{3} f(u)du = \int_{-1}^{3} f(x)dx$, thay vào (*), ta được:

$2\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{3} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5}dx \Rightarrow \int_{-1}^{3} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5}dx \approx 0,429 = 2 - \frac{\pi}{2}$.

TÓM TẮT HÀM ẨN DẠNG 3:

Cách giải: Lần lượt đặt $t = u(x)$ và $t = v(x)$ để giải hệ phương trình hai ẩn (trong đó có ẩn $f(x)$) để suy ra hàm số $f(x)$ (nếu $u(x) = x$ thì chỉ cần đặt một lần $t = v(x)$).

Các kết quả đặc biệt:

Cho $A.f(ax+b)+B.f(-ax+c)=g(x)$ với $A^2 \neq B^2$) khi đó

$$f(x)=\frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right)-B.g\left(\frac{x-c}{-a}\right)}{A^2-B^2} \quad (*)$$

+)Hệ quả 1 của (*): $A.f(x)+B.f(-x)=g(x) \Rightarrow f(x)=\frac{A.g(x)-B.g(-x)}{A^2-B^2}$

+)Hệ quả 2 của (*): $A.f(x)+B.f(-x)=g(x) \Rightarrow f(x)=\frac{g(x)}{A+B}$ với $g(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$. Tính $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx$.

A. $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=-1$.

Lời giải

Đặt, $t=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{t}$ khi đó điều kiện trở thành $f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t)=\frac{3}{t} \Rightarrow 2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x}$.

Hay $4f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{6}{x}$, kết hợp với điều kiện $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$. Suy ra :

$$3f(x)=\frac{6}{x}-3x \Rightarrow \frac{f(x)}{x}=\frac{2}{x^2}-1 \Rightarrow I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)dx=\left.\left(\frac{-2}{x}-x\right)\right|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{2}.$$

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x)+2018f(x)=2x\sin x$. Tính giá trị của $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{2}{2019}$. **B.** $I=\frac{2}{1009}$. **C.** $I=\frac{4}{2019}$. **D.** $I=\frac{1}{1009}$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức – theo góc nhìn dạng 2)

Với $f(-x)+2018f(x)=2x\sin x$ ta có $A=1; B=2018$

Suy ra $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{1+2018}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x\mathrm{d}x \overset{Casio}{=} \frac{4}{2019}$

Cách 2: (Dùng công thức – theo góc nhìn dạng 3)

Áp dụng Hệ quả 2: $A.f(x)+Bf(-x)=g(x) \Rightarrow f(x)=\frac{g(x)}{A+B}$ với $g(x)$ là hàm số chẵn.

Ta có $f(-x)+2018f(x)=2x\sin x \Rightarrow f(x)=\frac{2x\sin x}{2019}$

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2019}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x \overset{Casio}{=} \frac{4}{2019}$$

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x)+2018f(x)=e^x$. Tính giá trị của $I=\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx$

A. $I=\dfrac{e^2-1}{2019e}$. **B.** $I=\dfrac{e^2-1}{2018e}$. **C.** $I=0$. **D.** $I=\dfrac{e^2-1}{e}$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức - theo góc nhìn dạng 2).

Với $f(-x)+2018f(x)=e^x$ ta có $A=1;B=2018$.

Suy ra $I=\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx=\dfrac{1}{1+2018}\int\limits_{-1}^{1}e^xdx=\dfrac{1}{2019}e^x\Big|_{-1}^{1}=\dfrac{e^2-1}{2019e}$.

Cách 2: (Dùng công thức –theo góc nhìn dạng 3)

Áp dụng Hệ quả 1: $A.f(x)+B.f(-x)=g(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{A.g(x)-B.g(-x)}{A^2-B^2}$.

Ta có:

$$f(-x)+2018f(x)=e^x\Rightarrow f(x)=\frac{2018e^x-e^{-x}}{2018^2-1}$$

$$\Rightarrow\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx=\frac{1}{2019.2017}\int\limits_{-1}^{1}\left(2018e^x-e^{-x}\right)dx$$

$$\approx 1{,}164.10^{-3}\approx\frac{e^2-1}{2019e}\ \text{(Casio)}.$$

Câu 14. **[Chuyên Hà Tĩnh – 2018]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x)+f(1-x)=12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y=2x+2$. **B.** $y=4x-6$. **C.** $y=2x-6$. **D.** $y=4x-2$.

Lời giải

Áp dụng kết quả Dạng 3:

"Cho $A.f(ax+b)+B.f(-ax+c)=g(x)$ (với $A^2\neq B^2$)

khi đó $f(x)=\dfrac{A.g\left(\dfrac{x-b}{a}\right)-B.g\left(\dfrac{x-c}{a}\right)}{A^2-B^2}$".

Ta có

$$2f(2x)+f(1-x)=12x^2=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\frac{2.g\left(\frac{x}{2}\right)-g\left(\frac{x-1}{-2}\right)}{2^2-1}$$

$$=\frac{6x^2-3(x-1)^2}{3}=x^2+2x-1$$

Suy ra $\begin{cases} f(1)=2 \\ f'(1)=4 \end{cases}$, khi đó phương trình tiếp tuyến cần lập là: $y=4x-2$.

Câu 15. **[Chuyên Thái Bình – Lần 6 – 2018]** Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx=2018$ và $g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g(x)+g(-x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.

A. $I=2018$. **B.** $I=\dfrac{1009}{2}$. **C.** $I=4036$. **D.** $I=1008$.

Lời giải

Áp dụng Hệ quả 2 (của Dạng 3):

$A.g(x)+B.g(-x)=h(x)\Rightarrow g(x)=\dfrac{h(x)}{A+B}$ với $h(x)$ là hàm số chẵn.

Ta có: $g(x)+g(-x)=1=h(x)\Rightarrow g(x)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.

Kết hợp với điều kiện $f(x)$ là hàm số chẵn, ta có:

$$I=\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=2018.$$

Chú ý: *Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-a;a]\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$.*

Câu 16. **(Sở Kiên Giang – 2018)** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x)+3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=-\dfrac{4}{15}$. **B.** $I=\dfrac{1}{15}$. **C.** $I=\dfrac{4}{75}$. **D.** $I=\dfrac{1}{25}$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức – theo góc nhìn dạng 2)

Với $2f(x)+3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$ ta có $A=2;B=3$.

Suy ra: $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{1}{2+3}\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx \overset{Casio}{=} 0,05(3)=\dfrac{4}{75}$.

Cách 2: (Dùng công thức – theo góc nhìn dạng 3)

Áp dụng kết quả của Dạng 3:

"Cho $A.f(ax+b)+B.f(-ax+c)=g(x)$ (Với $A^2\neq B^2$) khi đó

$$f(x)=\frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right)-B.g\left(\frac{x-c}{-a}\right)}{A^2-B^2}".$$

Ta có: $2f(x)+3f(1-x)=x\sqrt{1-x}=g(x)\Rightarrow f(x)=\frac{2g(x)-3g(1-x)}{2^2-3^2}$

$=\frac{2x\sqrt{1-x}-3(1-x)\sqrt{x}}{-5}$.

Suy ra: $I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{2x\sqrt{1-x}-3(1-x)\sqrt{x}}{-5}dx\overset{Casio}{=}0,05(3)=\frac{4}{75}$.

Cách 3: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

Từ $2f(x)+3f(1-x)=x\sqrt{1-x}\Rightarrow 2\int_0^1 f(x)dx+3\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$

$\overset{Casio}{=}0,2(6)=\frac{4}{15}(*)$ Đặt $u=1-x\Rightarrow du=-dx$; Với $x=0\Rightarrow u=1$ và $x=1\Rightarrow u=0$.

Suy ra $\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 f(u)du=\int_0^1 f(x)dx$ thay vào $(*)$, ta được:

$5\int_0^2 f(x)dx=\frac{4}{15}\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx=\frac{4}{75}$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^{x^2} f(t)dt=x\cos(\pi x)$. Giá trị của $f(4)$ là:

A. $f(4)=1$. **B.** $f(4)=4$. **C.** $f(4)=\frac{1}{2}$. **D.** $f(4)=\frac{1}{4}$.

Lời giải

Sử dụng công thức $\left(\int_a^{u(x)} f(t)dt\right)'=u'.f(u)$ (xem lại **DẠNG 4**), ta có:

$\int_0^{x^2} f(t)dt=x\cos(\pi x)\Rightarrow\left(\int_0^{x^2} f(t)dt\right)'=(x\cos(\pi x))'$

$\Leftrightarrow 2xf(x^2)=\cos(\pi x)-\pi x\sin(\pi x)$ (*)

Thay $x=2$ vào (*), ta được: $4f(4)=\cos(2\pi)\text{-}2\pi.\sin(2\pi)=1\Rightarrow f(4)=\frac{1}{4}$.

Câu 18. **[Lương Thế Vinh – Hà Nội – lần 3 – 2018]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Biết $\int_0^{x^2} f(t)dt=e^{x^2}+x^4-1$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(4)$ là:

A. $f(4)=e^4+4$. **B.** $f(4)=4e^4$. **C.** $f(4)=e^4+8$. **D.** $f(4)=1$.

Lời giải

Sử dụng công thức $\left(\int\limits_a^{u(x)} f(t)dt\right)' = u'.f(u)$ (xem lại **DẠNG 4**), ta có:

$$\int\limits_0^{x^2} f(t)dt = e^{x^2} + x^4 - 1 \Rightarrow \left(\int\limits_0^{x^2} f(t)dt\right)' = \left(e^{x^2} + x^4 - 1\right)'$$

$\Leftrightarrow 2xf(x^2) = 2x.e^{x^2} + 4x^3.$

Suy ra: $f(x^2) = e^{x^2} + 2x^2 \Rightarrow f(x) = e^x + 2x$

$\Rightarrow \ f(4) = e^4 + 8.$

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x) > 0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $g(x) = 1 + 2018\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t$ và $g(x) = f^2(x)$. Tính $\int\limits_0^1 \sqrt{g(x)}\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1011}{2}$ **B.** $\dfrac{1009}{2}$ **C.** $\dfrac{2019}{2}$ **D.** 505

Lời giải

Sử dụng công thức $\left(\int\limits_0^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' = u'.f(u)$, ta có

$$g(x) = 1 + 2018\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow g'(x) = 2018f(x) \xleftrightarrow[f(x)>0]{g(x)=f^2(x)} g'(x) = 2018\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} = 2018.$$

Suy ra $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\mathrm{d}x = \int 2018\mathrm{d}x \Leftrightarrow 2\sqrt{g(x)} = 2018x + C\,(*)$

Từ điều kiện $g(x) = 1 + 2018\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow g(0) = 1$ thay vào $(*)$ suy ra $C = 2$.

Khi đó $\sqrt{g(x)} = 1009x + 1 \Rightarrow \int\limits_0^1 \sqrt{g(x)}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (1009x + 1)\mathrm{d}x = \dfrac{1011}{2}$.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[1;2]$. Biết $\int\limits_x^{x^2} f(t)\mathrm{d}t = 2x^2 + x - 1$ với $\forall x \in [1;2]$. Tính tích phân $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = a + \dfrac{b}{c}\ln d$. Biết a,b,c,d đều là các số nguyên tố. Tính $T = a + b + c + d$.

A. $T = 10$ **B.** $T = 11$ **C.** $T = 17$ **D.** $T = 16$

Lời giải

Sử dụng công thức $\left(\int\limits_{v(x)}^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' = u'.f(u) - v'.f(v)$, ta có

$$\int_x^{x^2} f(t)\mathrm{d}t = 2x^2+x-1 \Rightarrow \left(\int_x^{x^2} f(t)\mathrm{d}t\right)' = \left(2x^2+x-1\right)' \Leftrightarrow 2x.f(x)-f(x)=4x+1$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{4x+1}{2x-1}, \forall x\in[1;2]$$

Suy ra $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{4x+1}{2x-1}\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(2+\frac{3}{2x-1}\right)\mathrm{d}x = \left(2x+\frac{3}{2}\ln|2x-1|\right)\Big|_1^2 = 2+\frac{3}{2}\ln 3$

Suy ra $\begin{cases} a=c=2 \\ b=d=3 \end{cases} \Rightarrow T=10$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x^3+2x-2\right)=3x-1$. Tính $I=\int_1^{10} f(x)dx$

.

A. $I=\frac{45}{4}$. **B.** $I=\frac{9}{4}$. **C.** $I=\frac{135}{4}$. **D.** $I=\frac{27}{4}$.

Lời giải

Đặt $t=x^3+2x-2 \Rightarrow \begin{cases} dt=\left(3x^2+2\right)dx \\ f(t)=3x-1 \end{cases}$.

Ta viết lại $I=\int_1^{10} f(x)dx = \int_1^{10} f(t)dt$.

Đổi cận: Với $t=1 \Rightarrow 1=x^3+2x-2 \Leftrightarrow x=1$ và $t=10 \Rightarrow 10=x^3+2x-2 \Leftrightarrow x=2$.

Khi đó $I=\int_1^{10} f(t)dt = \int_1^3 (3x-1)\left(3x^2+2\right)dx = \frac{135}{4}$.

Chú ý: Đây là lớp câu hỏi thuộc **dạng 5**, ta có thể tóm tắt hàm ẩn dạng 5 dưới phát biểu của bài toán sau:

Bài toán: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f\left(u(x)\right)=v(x)$ và $v(x)$ là hàm đơn điệu (luôn đồng biến hoặc nghịch biến) trên $\mathbb{R}$. Hãy đi tính tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$.

Cách giải: Đặt $t=u(x) \Rightarrow \begin{cases} dt=u'(x)dx \\ f(t)=v(x) \end{cases}$.

Ta viết lại $I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$.

Đổi cận: Với $t=a \Rightarrow u(x)=a \Leftrightarrow x=\alpha$ và $t=b \Rightarrow b=u(x) \Leftrightarrow x=\beta$.

Khi đó $I=\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta v(x).u'(x)dx$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x^3+1\right)=2x-1, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^2 f(x)dx$.

A. $I=-2$. **B.** $I=\dfrac{5}{2}$. **C.** $I=-4$. **D.** $I=6$.

Lời giải

Đặt $t=x^3+1\Rightarrow\begin{cases}dt=3x^2dx\\ f(t)=2x-1\end{cases}$.

Ta viết lại $I=\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1 f(t)dt$.

Đổi cận: Với $t=0\Rightarrow 0=x^3+1\Leftrightarrow x=-1$ và $t=1\Rightarrow 1=x^3+1\Leftrightarrow x=1$.

Khi đó $I=\int\limits_0^1 f(t)dt=\int\limits_{-1}^1(2x-1).3x^2dx=-2$.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f\left(x^3+3x+1\right)=3x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_1^5 x.f'(x)dx$

.

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{17}{4}$. **C.** $\dfrac{33}{4}$. **D.** -1761.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=f(x)\end{cases}\Rightarrow I=xf(x)\Big|_1^5-\int\limits_1^5 f(x)dx$.

Từ $f\left(x^3+3x+1\right)=3x+2\Rightarrow\begin{cases}f(5)=5\ (x=1)\\ f(1)=2\ \ (x=0)\end{cases}$, suy ra $I=23-\int\limits_1^5 f(x)dx$.

Đặt $t=x^3+3x+1\Rightarrow\begin{cases}dt=\left(3x^2+3\right)dx\\ f(t)=3x+2\end{cases}$

Đổi cận: Với $t=1\Rightarrow 1=x^3+3x+1\Leftrightarrow x=0$ và $t=5\Rightarrow x^3+3x+1=5\Leftrightarrow x=1$.

Khi đó $I=23-\int\limits_1^5 f(x)dx=23-\int\limits_0^1(3x+2)\left(3x^2+3\right)dx\overset{Casio}{=}\dfrac{33}{4}$

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x)+f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^2 f(x)dx$

A. $I=2$. **B.** $I=\dfrac{3}{2}$. **C.** $I=\dfrac{1}{2}$. **D.** $I=\dfrac{5}{4}$.

Lời giải

Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=y^3+y\Rightarrow dx=\left(3y^2+1\right)dy$

Đổi cận $\begin{cases}x=0\to y^3+y=0\Leftrightarrow y=0\\ x=2\to y^3+y=2\Leftrightarrow y=1\end{cases}$

Khi đó $I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 y\left(3y^2+1\right)dy=\int_0^1\left(3y^3+y\right)dy=\dfrac{5}{4}$

Chú ý: Đây là lớp câu hỏi thuộc **Dạng 6**, ta có thể **TÓM TẮT HÀM ẨN DẠNG 6** dưới phát biểu của bài toán sau:

Bài toán: " Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $g\left[f(x)\right]=x$ và $g(t)$ là hàm đơn điệu (luôn đồng biến hoặc nghịch biến) trên $\mathbb{R}$ .Hãy tính tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$ "

Cách giải: Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=g(y)\Rightarrow dx=g'(y)dy$

Đổi cận $\begin{cases} x=a\to g(y)=a\Leftrightarrow y=\alpha \\ x=b\to g(y)=b\Leftrightarrow y=\beta \end{cases}$

Suy ra $I=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta yg(y)dy$

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f^3(x)-3f^2(x)+6f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{5}{4}$. **B.** $I=\dfrac{5}{2}$. **C.** $I=\dfrac{5}{12}$. **D.** $I=\dfrac{5}{3}$.

Lời giải

Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=2y^3-3y^2+6y\Rightarrow \mathrm{d}x=6\left(y^2-y+1\right)\mathrm{d}y$.

Đổi cận: với $x=0\Rightarrow 2y^3-3y^2+6y=0\Leftrightarrow y=0$ và $x=5\Rightarrow 2y^3-3y^2+6y=5\Leftrightarrow y=1$.

Khi đó $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 y.6\left(y^2-y+1\right)\mathrm{d}y=6\int\limits_0^1\left(y^3-y^2+y\right)\mathrm{d}y=\dfrac{5}{2}$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x+f^3(x)+2f(x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_{-2}^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{7}{4}$. **B.** $I=\dfrac{7}{2}$. **C.** $I=\dfrac{7}{3}$. **D.** $I=\dfrac{5}{4}$.

Lời giải

Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=-y^3-2y+1\Rightarrow \mathrm{d}x=\left(-3y^2-2\right)\mathrm{d}y$.

Đổi cận: Với $x=-2\Rightarrow -y^3-2y+1=-2\Leftrightarrow y=1$; $x=1\Rightarrow -y^3-2y+1=1\Leftrightarrow y=0$.

Khi đó: $I=\int\limits_1^0 y\left(-3y^2-2\right)\mathrm{d}y=\dfrac{7}{4}$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x).f(1-x)=1$ với $\forall x\in[0;1]$. Tính giá trị của $I=\int\limits_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

A. $\dfrac{3}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $t=1-x \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}t=-dx \\ f(x)=\dfrac{1}{f(t)} \end{cases}$ và $x=a \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=0$. Khi đó $I=\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

$=\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{1+\dfrac{1}{f(t)}}=\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

$2I=\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}+\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\int\limits_0^1 dx=1 \Rightarrow I=\dfrac{1}{2}$.

Chú ý: Đây là câu hỏi thuộc ***Dạng 7***, ta có thể **TÓM TẮC HÀM ẨN DẠNG 7** dưới phát biểu của bài toán sau:

Bài toán: " Cho $f(x).f(a+b-x)=k^2$, khi đó $I=\int\limits_a^b \dfrac{\mathrm{d}x}{k+f(x)}=\dfrac{b-a}{2k}$

Chứng minh:

Đặt $t=a+b-x \Rightarrow \begin{cases} dt=-dx \\ f(x)=\dfrac{k^2}{f(t)} \end{cases}$ và $x=a \Rightarrow t-b$; $x=b \Rightarrow t=a$.

Khi đó $I=\int\limits_a^b \dfrac{\mathrm{d}x}{k+f(x)}=\int\limits_a^b \dfrac{\mathrm{d}x}{k+\dfrac{k^2}{f(t)}}=\dfrac{1}{k}\int\limits_a^b \dfrac{\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x}{k+f(x)}$.

$2I=\int\limits_a^b \dfrac{\mathrm{d}x}{k+f(x)}+\dfrac{1}{k}\int\limits_a^b \dfrac{\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x}{k+f(x)}=\dfrac{1}{k}\int\limits_a^b \mathrm{d}x=\dfrac{1}{k}(b-a) \Rightarrow I=\dfrac{b-a}{2k}$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $f(x)>0$ và $f(0).f(2018-x)=1$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^{2018} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

A. $I=2018$. **B.** $I=0$ **C.** $I=1009$ **D.** 4016

Lời giải

Áp dụng kết quả của dạng 7 (xem lại câu 27), ta có $I=\int\limits_0^{2018} \dfrac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x=\dfrac{2018-0}{2.1}=1009$

.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x)=f(x)$. Biết $\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=5$. Tính tích phân $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{11}{2}$.

Lời giải

Đặt $t=4-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$ và $x=1 \Rightarrow t=3$; $x=3 \Rightarrow t=1$.

Khi đó: $5=\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 (4-t)f(4-t)\mathrm{d}t=\int\limits_1^3 (4-x)f(4-x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 (4-x)f(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra: $10=\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x+\int_1^3(4-x)f(x)\mathrm{d}x=4\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$.

Chú ý: Đây là câu hỏi thuộc **dạng 8**, ta có thể **TÓM TẮT HÀM ẨN DẠNG 8** dưới phát biểu của bài toán sau:

Bài toán: Cho $\begin{cases} f(a+b-x)=f(x) \\ \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=I \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{2I}{a+b}$.

Chứng minh: Đặt $t=a+b-x\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x\\ x=a\Rightarrow t=b\\ x=b\Rightarrow t=a\end{cases}$. Khi đó

$$I=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\int_a^b(a+b-t)\mathrm{f}(a+b-t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b(a+b-x)f(a+b-x)\mathrm{d}x=\int_a^b(a+b-x)f(x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $2I=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x+\int_a^b(a+b-x)f(x)\mathrm{d}x=(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{2I}{a+b}$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)-f(3-x)=0$. Biết $\int_{-1}^4 xf(x)\mathrm{d}x=2$. Tính $\int_{-1}^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Áp dụng kết quả Dạng 8 (bài 29) ta có: $\int_{-1}^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2I}{a+b}=\frac{2.2}{(-1)+4}=\frac{4}{3}$.

Câu 31. Tính $I=\int_0^2\min\left\{x;\sqrt[3]{2-x}\right\}\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=\frac{3}{4}$. **C.** $I=1$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Lời giải

Ta xét dấu $f(x)=x-\sqrt[3]{2-x}$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $x-\sqrt[3]{2-x}=0\Leftrightarrow x^3+x-2=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+x+2)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng xét dấu

x	0		1		2
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Do đó $\min\left\{x;\sqrt[3]{2-x}\right\}=\begin{cases}x & \text{khi } x\in[0;1]\\ \sqrt[3]{2-x} & \text{khi } x\in[1;2]\end{cases}$.

Suy ra $I=\int\limits_0^2 \min\left\{x;\sqrt[3]{2-x}\right\}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 \sqrt[3]{2-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$.

Câu 32. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 \max\left\{x;\,x^3\right\}dx$.

A. $\frac{17}{4}$. **B.** 2. **C.** $\frac{15}{4}$. **D.** $\frac{7}{4}$.

Lời giải

Trên đoạn $[0;\,2]$, xét $x\ge x^3 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)\le 0 \xleftrightarrow{x\in[0;\,2]} 0\le x\le 1$.

Vậy $\begin{cases} x\in[0;\,1]\Rightarrow x\ge x^3 \\ x\in[1;\,2]\Rightarrow x\le x^3 \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{[0;\,2]}\left\{x;\,x^3\right\}=\begin{cases} x & khi\ 0\le x\le 1 \\ x^3 & khi\ 1\le x\le 2 \end{cases}$.

Suy ra $I=\int\limits_0^2 \max\left\{x;x^3\right\}dx=\int\limits_0^1 xdx+\int\limits_1^2 x^3dx=\frac{1}{2}+\frac{15}{4}=\frac{17}{4}$.

Chú ý: *Đây là câu hỏi thuộc* ***Dạng 9 (Tích phân cho bởi nhiều công thức dưới hình thức bài toán min, max)*** ta có thể **TÓM TẮT HÀM ẨN DẠNG 9** dưới phát biểu của bài toán sau:

Bài toán: Tính tích phân $I=\int\limits_a^b \max\left\{f(x);\,g(x)\right\}dx$ hoặc $I=\int\limits_a^b \min\left\{f(x);\,g(x)\right\}dx$.

Cách giải: (tham khảo qua lời giải của Câu 31, 32, 33).

Câu 33. Tính tích phân $I=\int\limits_0^3 \max\left\{x^3;\,4x^2-3x\right\}dx$.

A. $\frac{117}{2}$. **B.** $\frac{707}{2}$. **C.** $\frac{275}{12}$. **D.** $\frac{119}{6}$.

Lời giải

Trên đoạn $[0;\,3]$:

Xét $x^3\ge 4x^2-3x \Leftrightarrow x(x-1)(x-3)\ge 0 \xleftrightarrow{x\in[0;\,3]} x\in[0;\,1]$.

Vậy $\begin{cases} x\in[0;\,1]\Rightarrow x^3\ge 4x^2-3x \\ x\in[1;\,3]\Rightarrow x^3\le 4x^2-3x \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{[0;\,3]}\left\{x^3;\,4x^2-3x\right\}=\begin{cases} x^3 & khi\ x\in[0;\,1] \\ 4x^2-3x & khi\ x\in[1;\,3] \end{cases}$.

Khi đó $I=\int\limits_0^3 \max\left\{x^3;4x^2-3x\right\}dx=\int\limits_0^1 x^3dx+\int\limits_1^3 \left(4x^2-3x\right)dx=\frac{275}{12}$.