TÍCH PHÂN VẬN DỤNG CAO TRONG ĐỀ THI THPT QUỐC GIA 2018

Vấn đề 1. Tính tích phân theo định nghĩa

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải. Ta có $\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_0^1 = f(1)-f(0)$.

Từ $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2} \longrightarrow \begin{cases} 2f(0)+3f(1)=1 \\ 2f(1)+3f(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0)=-\frac{2}{5} \\ f(1)=\frac{3}{5} \end{cases}$.

Vậy $I=\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = f(1)-f(0)=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1$. **Chọn C.**

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0)=f(1)=1$. Biết rằng $\int\limits_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x = ae+b$. Tính $Q=a^{2018}+b^{2018}$.

A. $Q=2^{2017}+1$. **B.** $Q=2$. **C.** $Q=0$. **D.** $Q=2^{2017}-1$.

Lời giải. Ta có $\int\limits_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[e^x f(x)\right]' \mathrm{d}x = \left[e^x f(x)\right]\Big|_0^1 = ef(1)-f(0) \overset{f(0)=f(1)=1}{=} e-1$.

Suy ra $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \longrightarrow Q=a^{2018}+b^{2018}=1^{2018}+(-1)^{2018}=2$. **Chọn B.**

Câu 3. Cho các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn $\int\limits_0^2 f'(x)g(x)\mathrm{d}x=2$, $\int\limits_0^2 f(x)g'(x)\mathrm{d}x=3$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 \left[f(x)g(x)\right]' \mathrm{d}x$.

A. $I=-1$. **B.** $I=1$. **C.** $I=5$. **D.** $I=6$.

Lời giải. Ta có $I=\int\limits_0^2 \left[f(x)g(x)\right]' \mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\right]\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^2 f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 f(x)g'(x)\mathrm{d}x = 2+3=5$. **Chọn C.**

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ và thỏa $\int\limits_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t = x.\sin(\pi x)$. Tính $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

A. $f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}$. **B.** $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$. **C.** $f\left(\frac{1}{4}\right)=1$. **D.** $f\left(\frac{1}{4}\right)=1+\frac{\pi}{2}$.

Lời giải. Từ $\int\limits_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t = x.\sin(\pi x)$, đạo hàm hai vế ta được $2xf\left(x^2\right)=\sin(\pi x)+\pi x\cos(\pi x)$.

Cho $x=\frac{1}{2}$ ta được $2.\frac{1}{2}.f\left(\frac{1}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}=1 \longrightarrow f\left(\frac{1}{4}\right)=1$. **Chọn C.**

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;+\infty)$ với $a>0$ và thỏa $\int\limits_a^x \frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t+6=2\sqrt{x}$ với mọi $x>a$. Tính $f(4)$.

A. $f(4)=2$. **B.** $f(4)=4$. **C.** $f(4)=8$. **D.** $f(4)=16$.

Lời giải. Từ $\int\limits_a^x \frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t+6=2\sqrt{x}$, đạo hàm hai vế ta được $\frac{f(x)}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Suy ra $f(x)=x\sqrt{x} \longrightarrow f(4)=4\sqrt{4}=8$. **Chọn C.**

Vấn đề 2. Kỹ thuật đổi biến

Câu 6. Cho $\int\limits_0^{2017} f(x)\mathrm{d}x = 2$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\sqrt{e^{2017}-1}} \frac{x}{x^2+1}.f\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I = 1$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = 5$.

Lời giải. Đặt $t = \ln\left(x^2+1\right)$, suy ra $\mathrm{d}t = \frac{2x\mathrm{d}x}{x^2+1} \longrightarrow \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{\mathrm{d}t}{2}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \to t = 0 \\ x = \sqrt{e^{2017}-1} \to t = 2017 \end{cases}$.

Khi đó $I = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2017} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2017} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.2 = 1$. **Chọn A.**

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_1^9 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 4$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = 2$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 2$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = 10$.

Lời giải. ● Xét $\int\limits_1^9 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 4$. Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x$, suy ra $2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 1 \to t = 1 \\ x = 9 \to t = 3 \end{cases}$. Suy ra $4 = \int\limits_1^9 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int\limits_1^3 f(t)2\mathrm{d}t \longrightarrow \int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t = 2$.

● Xét $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = 2$. Đặt $u = \sin x$, suy ra $\mathrm{d}u = \cos x\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \to u = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \to u = 1 \end{cases}$. Suy ra $2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Vậy $I = \int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 4$. **Chọn C.**

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = 4$, $\int\limits_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 6$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 1$.

Lời giải. Xét $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = 4$.

Đặt $t = \tan x$, suy ra $\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \left(\tan^2 x + 1\right)\mathrm{d}x \longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \to t = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \to t = 1 \end{cases}$. Khi đó $4 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{f(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

Từ đó suy ra $I = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 4 + 2 = 6$. **Chọn A.**

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x = 1$, $\int\limits_e^{e^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I = \int\limits_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I = 1$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 4$.

Lời giải. ● Xét $A = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x = 1$. Đặt $t = \cos^2 x$.

Suy ra $\mathrm{d}t=-2\sin x\cos x\mathrm{d}x=-2\cos^2 x\tan x\mathrm{d}x=-2t.\tan x\mathrm{d}x\longrightarrow\tan x\mathrm{d}x=-\dfrac{\mathrm{d}t}{2t}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=0\longrightarrow t=1 \\ x=\dfrac{\pi}{4}\longrightarrow t=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Khi đó $1=A=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^{\frac{1}{2}}\dfrac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1\dfrac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\longrightarrow\int_{\frac{1}{2}}^1\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=2.$

● Xét $B=\displaystyle\int_e^{e^2}\dfrac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}\mathrm{d}x=1$. Đặt $u=\ln^2 x$.

Suy ra $\mathrm{d}u=\dfrac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{2\ln^2 x}{x\ln x}\mathrm{d}x=\dfrac{2u}{x\ln x}\mathrm{d}x\longrightarrow\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{2u}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=e\longrightarrow u=1 \\ x=e^2\longrightarrow u=4 \end{cases}$.

Khi đó $1=B=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^4\dfrac{f(u)}{u}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int_1^4\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\longrightarrow\int_1^4\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=2.$

● Xét tích phân cần tính $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2\dfrac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x$.

Đặt $v=2x$, suy ra $\begin{cases} \mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}v \\ x=\dfrac{v}{2} \end{cases}$. Đổi cận: $\begin{cases} x=\dfrac{1}{4}\longrightarrow v=\dfrac{1}{2} \\ x=2\longrightarrow v=4 \end{cases}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^4\dfrac{f(v)}{v}\mathrm{d}v=\int_{\frac{1}{2}}^4\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^1\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x+\int_1^4\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=2+2=4$. **Chọn D.**

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$, thỏa $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2\dfrac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{3}{2}$. **B.** $I=2$. **C.** $I=\dfrac{5}{2}$. **D.** $I=3$.

Lời giải. Đặt $x=\dfrac{1}{t}$, suy ra $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$. Đổi cận: $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\longrightarrow t=2 \\ x=2\longrightarrow t=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int_2^{\frac{1}{2}}\dfrac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^2}+1}.\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{2}}^2\dfrac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2+1}\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{2}}^2\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

Suy ra $2I=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2\dfrac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^2\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^2\dfrac{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^2\dfrac{x^2+\frac{1}{x^2}+2}{x^2+1}\mathrm{d}x$

$=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2\dfrac{x^2+1}{x^2}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right|_{\frac{1}{2}}^2=3\longrightarrow I=\dfrac{3}{2}$. **Chọn A.**

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Tính $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-6$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=6$.

Lời giải. Đặt $t=-x\longrightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Đổi cận: $\begin{cases} x=-\dfrac{3\pi}{2}\to t=\dfrac{3\pi}{2} \\ x=\dfrac{3\pi}{2}\to t=-\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$.

Khi đó $I=-\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} f(-t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)\,\mathrm{d}x.$

Suy ra $2I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left[f(t)+f(-t)\right]\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2+2\cos 2t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2\left|\cos t\right|\mathrm{d}t\overset{\text{CASIO}}{=}12\longrightarrow I=6.$ **Chọn D.**

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa $f\left(x^5+4x+3\right)=2x+1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_{-2}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 10. **C.** $\dfrac{32}{3}$. **D.** 72.

Lời giải. Đặt $x=t^5+4t+3$, suy ra $\mathrm{d}x=\left(5t^4+4\right)\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{cases} x=-2\to t=-1 \\ x=8\to t=1\end{cases}$.

Khi đó $\int\limits_{-2}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1} f\left(t^5+4t+3\right)\left(5t^4+4\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{-1}^{1}(2t+1)\left(5t^4+4\right)\mathrm{d}t=10.$ **Chọn B.**

Câu 13. Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa $m.f(x)+n.f(1-x)=g(x)$ với m,n là số thực khác 0 và $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=1$. Tính $m+n$.

A. $m+n=0$. **B.** $m+n=\dfrac{1}{2}$. **C.** $m+n=1$. **D.** $m+n=2$.

Lời giải. Từ giả thiết $m.f(x)+n.f(1-x)=g(x)$, lấy tích phân hai vế ta được

$$\int\limits_0^1\left[m.f(x)+n.f(1-x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$$

Suy ra $m+n\int\limits_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x=1$ (do $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=1$). (1)

Xét tích phân $\int\limits_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $t=1-x$, suy ra $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0\to t=1 \\ x=1\to t=0\end{cases}$.

Khi đó $\int\limits_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_1^0 f(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $m+n=1$. **Chọn C.**

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f'(x)=f'(1-x)$ với mọi $x\in[0;1]$. Biết rằng $f(0)=1, f(1)=41$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\sqrt{41}$. **B.** $I=21$. **C.** $I=41$. **D.** $I=42$.

Lời giải. Ta có $f'(x)=f'(1-x)\longrightarrow f(x)=-f(1-x)+C$.

Suy ra $f(0)=-f(1)+C\xrightarrow{f(0)=1,\,f(1)=41.}C=42.$

Suy ra $f(x)=-f(1-x)+42\longrightarrow f(x)+f(1-x)=42$

$\longrightarrow\int\limits_0^1\left[f(x)+f(1-x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 42\,\mathrm{d}x=42.$ (1)

Vì $f'(x)=f'(1-x)\longrightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=21$. **Chọn B.**

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(x)+f(x)=x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{4}{5}$. **B.** $I=\frac{4}{5}$. **C.** $I=-\frac{5}{4}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Lời giải. Đặt $u=f(x)$, ta thu được $u^3+u=x$. Suy ra $(3u^2+1)\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$.

Từ $u^3+u=x$, ta đổi cận $\begin{cases}x=0\to u=0\\ x=2\to u=1\end{cases}$. Khi đó $I=\int\limits_0^1 u(3u^2+1)\mathrm{d}u=\frac{5}{4}$. **Chọn D.**

Cách khác. Nếu bài toán cho $f(x)$ có đạo hàm liên tục thì ta làm như sau:

Từ giả thiết $f^3(x)+f(x)=x\longrightarrow\begin{cases}f^3(0)+f(0)=0\\ f^3(2)+f(2)=2\end{cases}\to\begin{cases}f(0)=0\\ f(2)=1\end{cases}.$ $(*)$

Cũng từ giả thiết $f^3(x)+f(x)=x$, ta có $f'(x).f^3(x)+f'(x).f(x)=x.f'(x)$.

Lấy tích phân hai vế $\int\limits_0^2\left[f'(x).f^3(x)+f'(x).f(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 x.f'(x)\mathrm{d}x$

$$\longrightarrow\left(\frac{[f(x)]^4}{4}+\frac{[f(x)]^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=xf(x)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x\xrightarrow{(*)}\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{4}.$$

Vấn đề 3. Kỹ thuật tích phân từng phần

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^3 x.f'(x).e^{f(x)}\mathrm{d}x=8$ và $f(3)=\ln 3$. Tính $I=\int\limits_0^3 e^{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=11$. **C.** $I=8-\ln 3$. **D.** $I=8+\ln 3$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'(x).e^{f(x)}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=e^{f(x)}\end{cases}$. Khi đó $\int\limits_0^3 x.f'(x).e^{f(x)}\mathrm{d}x=x.e^{f(x)}\Big|_0^3-\int\limits_0^3 e^{f(x)}\mathrm{d}x$.

Suy ra $8=3.e^{f(3)}-\int\limits_0^3 e^{f(x)}\mathrm{d}x\longrightarrow\int\limits_0^3 e^{f(x)}\mathrm{d}x=9-8=1$. **Chọn A.**

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x\mathrm{d}x=10$ và $f(0)=3$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=-13$. **B.** $I=-7$. **C.** $I=7$. **D.** $I=13$.

Lời giải. Xét $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x\mathrm{d}x=10$, đặt $\begin{cases}u=\cos^2 x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\cos^2 x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=-\sin 2x\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$.

Khi đó $10=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x\mathrm{d}x=\cos^2 xf(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 10=-f(0)+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x\longrightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x=10+f(0)=13$. **Chọn D.**

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int\limits_1^2 f(x-1)\mathrm{d}x=3$ và $f(1)=4$. Tích phân $\int\limits_0^1 x^3 f'(x^2)\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải. Ta có $\int\limits_1^2 f(x-1)\mathrm{d}x = 3 \xrightarrow{t=x-1} \int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 3$ hay $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 3$.

Xét $\int\limits_0^1 x^3 f'(x^2)\mathrm{d}x \xrightarrow{t=x^2} \frac{1}{2}\int\limits_0^1 tf'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$.

Khi đó $\int\limits_0^1 x^3 f'(x^2)\mathrm{d}x \xrightarrow{t=x^2} \frac{1}{2}\int\limits_0^1 tf'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[xf(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x \right] = \frac{1}{2}[4-3] = \frac{1}{2}$. **Chọn C.**

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x)f(2-x) = e^{2x^2-4x}$ với mọi $x \in [0;2]$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I = -\frac{14}{3}$. **B.** $I = -\frac{32}{5}$. **C.** $I = -\frac{16}{3}$. **D.** $I = -\frac{16}{5}$.

Lời giải. Từ giả thiết $f(x)f(2-x) = e^{2x^2-4x} \xrightarrow{x=2} f(2) = 1$.

Ta có $I = \int\limits_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = x^3 - 3x^2 \\ \mathrm{d}v = \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = (3x^2-6x)\mathrm{d}x \\ v = \ln|f(x)| \end{cases}$.

Khi đó $I = (x^3-3x^2)\ln|f(x)|\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 (3x^2-6x)\ln|f(x)|\mathrm{d}x \overset{f(2)=1}{=} -3\int\limits_0^2 (x^2-2x)\ln|f(x)|\mathrm{d}x = -3J$.

Ta có $J = \int\limits_0^2 (x^2-2x)\ln|f(x)|\mathrm{d}x \overset{x=2-t}{=} \int\limits_2^0 \left[(2-t)^2 - 2(2-t)\right]\ln|f(2-t)|\mathrm{d}(2-t)$

$= \int\limits_2^0 \left[(2-x)^2 - 2(2-x)\right]\ln|f(2-x)|\mathrm{d}(2-x) = \int\limits_0^2 (x^2-2x)\ln|f(2-x)|\mathrm{d}x$.

Suy ra $2J = \int\limits_0^2 (x^2-2x)\ln|f(x)|\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 (x^2-2x)\ln|f(2-x)|\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 (x^2-2x)\ln|f(x)f(2-x)|\mathrm{d}x$

$= \int\limits_0^2 (x^2-2x)\ln e^{2x^2-4x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 (x^2-2x)(2x^2-4x)\mathrm{d}x = \frac{32}{15} \longrightarrow J = \frac{16}{15}$.

Vậy $I = -3J = -\frac{16}{5}$. **Chọn D.**

Câu 20. Cho biểu thức $S = \ln\left(1 + \int\limits_{\frac{n}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} (2-\sin 2x)e^{2\cot x}\mathrm{d}x\right)$, với số thực $m \neq 0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $S = 5$. **B.** $S = 9$.

C. $S = 2\cot\left(\frac{\pi}{4+m^2}\right) + 2\ln\left(\sin\frac{\pi}{4+m^2}\right)$. **D.** $S = 2\tan\left(\frac{\pi}{4+m^2}\right) + 2\ln\left(\frac{\pi}{4+m^2}\right)$.

Lời giải. Ta có $\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} (2-\sin 2x)e^{2\cot x}\mathrm{d}x = 2\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2\cot x}\mathrm{d}x - \int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x e^{2\cot x}\mathrm{d}x$. (1)

Xét $\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x e^{2\cot x}\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2\cot x}\mathrm{d}(\sin^2 x) = \sin^2 x.e^{2\cot x}\Big|_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\left(-\frac{2}{\sin^2 x}\right)e^{2\cot x}\mathrm{d}x$

$= \sin^2 x.e^{2\cot x}\Big|_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2\cot x}\mathrm{d}x$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $I=\sin^2 x.e^{2\cot x}\Big|_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}=-1+\sin^2\dfrac{\pi}{4+m^2}.e^{2\cot\frac{\pi}{4+m^2}}$.

$\longrightarrow S=\ln\left(\sin^2\dfrac{\pi}{4+m^2}.e^{2\cot\frac{\pi}{4+m^2}}\right)=2\cot\left(\dfrac{\pi}{4+m^2}\right)+2\ln\left(\sin\dfrac{\pi}{4+m^2}\right)$. **Chọn C.**

Vấn đề 4. Tính a, b, c trong tích phân

Câu 21. Biết $\int\limits_1^2 \ln\left(9-x^2\right)\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 2+c$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=|a|+|b|+|c|$.

A. $P=13$. **B.** $P=18$. **C.** $P=26$. **D.** $P=34$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(9-x^2\right)\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{-2x}{9-x^2}dx\\ v=x+3\end{cases}$.

Khi đó $I=(x+3)\ln\left(9-x^2\right)\Big|_1^2+2\int\limits_1^2\dfrac{x(x+3)}{9-x^2}\mathrm{d}x=5\ln 5-4\ln 8+2\int\limits_1^2\left(-1+\dfrac{3}{3-x}\right)\mathrm{d}x$

$=5\ln 5-12\ln 2-2\left(x+3\ln|3-x|\right)\Big|_1^2=5\ln 5-6\ln 2-2\longrightarrow\begin{cases}a=5\\ b=-6\\ c=-2\end{cases}\to P=13$. **Chọn A.**

Nhận xét. Ở đây chọn $v=x+3$ thay bởi x để rút gọn cho $9-x^2$, giảm thiểu biến đổi.

Câu 22. Biết $\int\limits_0^1\dfrac{\pi x^3+2^x+ex^3 2^x}{\pi+e.2^x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{e\ln n}.\ln\left(p+\dfrac{e}{e+\pi}\right)$ với $m,\ n,\ p$ là các số nguyên dương. Tính tổng $P=m+n+p$.

A. $P=5$. **B.** $P=6$. **C.** $P=7$. **D.** $P=8$.

Lời giải. Ta có $I=\int\limits_0^1\dfrac{\pi x^3+2^x+ex^3 2^x}{\pi+e.2^x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^3+\dfrac{2^x}{\pi+e.2^x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}x^4\Big|_0^1+A=\dfrac{1}{4}+A$.

Tính $A=\int\limits_0^1\dfrac{2^x}{\pi+e.2^x}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\pi+e.2^x\longrightarrow\mathrm{d}t=e.\ln 2.2^x\,\mathrm{d}x\longrightarrow 2^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{e\ln 2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $\begin{cases}x=0\to t=\pi+e\\ x=1\to t=\pi+2e\end{cases}$.

Khi đó $A=\dfrac{1}{e.\ln 2}.\int\limits_{\pi+e}^{\pi+2e}\dfrac{\mathrm{d}t}{t}=\dfrac{1}{e.\ln 2}\ln|t|\Big|_{\pi+e}^{\pi+2e}=\dfrac{1}{e\ln 2}\ln\dfrac{\pi+2e}{\pi+e}=\dfrac{1}{e\ln 2}\ln\left(1+\dfrac{e}{e+\pi}\right)$.

Vậy $I=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{e\ln 2}\ln\left(1+\dfrac{e}{e+\pi}\right)\longrightarrow\begin{cases}m=4\\ n=2\\ p=1\end{cases}\Rightarrow P=m+n+p=7$. **Chọn C.**

Câu 23. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x^2+(2x+\cos x)\cos x+1-\sin x}{x+\cos x}\mathrm{d}x=a\pi^2+b-\ln\dfrac{c}{\pi}$ với $a,\ b,\ c$ là các số hữu tỉ. Tính $P=ac^3+b$.

A. $P=\dfrac{5}{4}$. **B.** $P=\dfrac{3}{2}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=3$.

Lời giải. Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\left(x^2+2x\cos x+\cos^2 x\right)+(1-\sin x)}{x+\cos x}\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(x+\cos x)^2}{x+\cos x}\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{x+\cos x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\cos x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{d}(x+\cos x)}{x+\cos x}$

$=\left(\dfrac{1}{2}x^2+\sin x+\ln|x+\cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{8}\pi^2+1+\ln\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{1}{8}\pi^2+1-\ln\dfrac{2}{\pi}$

$\longrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{8}\\ b=1\\ c=2\end{cases}\longrightarrow P=ac^3+b=2$. **Chọn C.**

Câu 24. Biết $\int\limits_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} \dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}-e^x}\mathrm{d}x = 1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{b}{a}+a\sqrt{a}-\sqrt{b}$ với $a,\ b\in\mathbb{Z}^+$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-1$. **B.** $P=1$. **C.** $P=3$. **D.** $P=5$.

Lời giải. Ta có $I=\int\limits_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} \dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}-e^x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}\left(\sqrt{e^{2x}+1}+e^x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}\sqrt{e^{2x}+1}\mathrm{d}x+\int\limits_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}e^x\mathrm{d}x$.

- $\int\limits_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} e^x\mathrm{d}x = e^x\Big|_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} = 2\sqrt{2}-\sqrt{3}$.
- $\int\limits_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}\sqrt{e^{2x}+1}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{e^{2x}+1}\Leftrightarrow t^2=e^{2x}+1$, suy ra $2t\mathrm{d}t=2e^{2x}\mathrm{d}x\Leftrightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{t\mathrm{d}t}{e^{2x}}=\dfrac{t\mathrm{d}t}{t^2-1}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=\ln\sqrt{3}\to t=2\\ x=\ln\sqrt{8}\to t=3\end{cases}$.

Khi đó $\int\limits_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}\sqrt{e^{2x}+1}\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\dfrac{t^2\mathrm{d}t}{t^2-1}dt=\int\limits_2^3\left(1+\dfrac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t=\left(t+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_2^3=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$.

Vậy $I=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{3}\longrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}\longrightarrow P=a+b=5$. **Chọn D.**

Câu 25. Biết $\int\limits_1^2\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}^+$. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=12$. **B.** $P=18$. **C.** $P=24$. **D.** $P=46$.

Lời giải. Ta có $I=\int\limits_1^2\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\int\limits_1^2\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $u=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$, suy ra $\mathrm{d}u=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x\longrightarrow 2\mathrm{d}u=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x(x+1)}}\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{cases}x=2\to u=\sqrt{3}+\sqrt{2}\\x=1\to u=\sqrt{2}+1\end{cases}$. Khi đó $I=2\int\limits_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}=-\dfrac{2}{u}\Bigg|_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=-2\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right)$

$=-2\left(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}-\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}\right)=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2\longrightarrow\begin{cases}a=32\\b=12\\c=2\end{cases}\longrightarrow P=46$. **Chọn D.**

Câu 26. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{\cos^2x+1}+\sqrt{\sin^2x+1}}\mathrm{d}x=\dfrac{a\sqrt{2}+b\sqrt{6}+c}{6}$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=|a|+|b|+|c|$.

A. $P=10$. **B.** $P=12$. **C.** $P=14$. **D.** $P=36$.

Lời giải. Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{\cos^2x+1}+\sqrt{\sin^2x+1}}\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\sin 2x\cos 2x}{\sqrt{3+\cos 2x}+\sqrt{3-\cos 2x}}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\cos 2x\longrightarrow \mathrm{d}t=-2\sin 2x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\to t=1\\x=\dfrac{\pi}{4}\to t=0\end{cases}$.

Khi đó $I=-\sqrt{2}\int\limits_1^0\dfrac{t}{\sqrt{3+t}+\sqrt{3-t}}\mathrm{d}t=\sqrt{2}\int\limits_0^1\dfrac{t}{\sqrt{3+t}+\sqrt{3-t}}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1\left(\sqrt{3+t}-\sqrt{3-t}\right)\mathrm{d}t$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\dfrac{2}{3}\sqrt{(3+t)^3}+\dfrac{2}{3}\sqrt{(3-t)^3}\right]\Bigg|_0^1=\dfrac{16\sqrt{2}-12\sqrt{6}+8}{6}\longrightarrow\begin{cases}a=16\\b=-12\to P=36.\\c=8\end{cases}$ **Chọn D.**

Câu 27. Biết $\int\limits_1^4\sqrt{\dfrac{1}{4x}+\dfrac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}\mathrm{d}x=a+e^b-e^c$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=-5$. **B.** $P=-4$. **C.** $P=-3$. **D.** $P=3$.

Lời giải. Ta có $\int\limits_1^4\sqrt{\dfrac{1}{4x}+\dfrac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\sqrt{\dfrac{e^{2x}+4x+4e^x\sqrt{x}}{4xe^{2x}}}\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\sqrt{\dfrac{\left(e^x+2\sqrt{x}\right)^2}{\left(2e^x\sqrt{x}\right)^2}}\mathrm{d}x$

$$=\int_1^4 \frac{e^x+2\sqrt{x}}{2e^x\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_1^4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{e^x}\right)\mathrm{d}x=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{e^x}\right)\Bigg|_1^4=1-\frac{1}{e^4}+\frac{1}{e}=1+e^{-1}-e^{-4}$$

$$\longrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\\ c=-4\end{cases}\longrightarrow P=a+b+c=-4.$$ **Chọn B.**

Câu 28. Biết $\displaystyle\int_0^2\sqrt{\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}}\mathrm{d}x=a\pi+b\sqrt{2}+c$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=-1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=3$. **D.** $P=4$.

Lời giải. Đặt $\sqrt{x}=2\cos u$ với $u\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Suy ra $x=4\cos^2 u\longrightarrow \mathrm{d}x=-4\sin 2u\mathrm{d}u$.

Đổi cận $\begin{cases}x=0\longrightarrow u=\dfrac{\pi}{2}\\ x=2\longrightarrow u=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$. Khi đó $\displaystyle I=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{2+2\cos u}{2-2\cos u}}\sin 2u\mathrm{d}u=8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}.\sin u.\cos u\mathrm{d}u$

$$=16\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\frac{u}{2}.\cos u\mathrm{d}u=8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos u).\cos u\mathrm{d}u=8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos u\mathrm{d}u+4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)\mathrm{d}u$$

$$=8\sin u\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+(4x+2.\sin 2u)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi-4\sqrt{2}+6\longrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-4\\ c=6\end{cases}\longrightarrow P=3.$$ **Chọn C.**

Câu 29. Biết $\displaystyle I=\int_1^e\frac{\ln^2x+\ln x}{(\ln x+x+1)^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}-\frac{b}{(e+2)^2}$ với $a,\ b\in\mathbb{Z}^+$. Tính $P=b-a$.

A. $P=-8$. **B.** $P=-6$. **C.** $P=6$. **D.** $P=10$.

Lời giải. Ta có $\displaystyle\int_1^e\frac{\ln^2x+\ln x}{(\ln x+x+1)^3}\mathrm{d}x=\int_1^e\frac{\ln x+1}{\ln x+x+1}.\frac{\ln x}{(\ln x+x+1)^2}\mathrm{d}x.$

Đặt $\displaystyle t=\frac{\ln x+1}{\ln x+x+1}\longrightarrow \mathrm{d}t=\left(\frac{\ln x+1}{\ln x+x+1}\right)'\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{(\ln x+x+1)^2}\mathrm{d}x.$

Đổi cận: $\begin{cases}x=1\to t=\dfrac{1}{2}\\ x=e\to t=\dfrac{2}{e+2}\end{cases}$. Khi đó $\displaystyle I=-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{e+2}}t\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}t^2\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{e+2}}=\frac{1}{8}-\frac{2}{(e+2)^2}$. **Chọn B.**

Câu 30. Biết $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=a+\frac{\pi^2}{b}+\frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên. Tính $P=a-b+c$.

A. $P=-37$. **B.** $P=-35$. **C.** $P=35$. **D.** $P=41$.

Lời giải. Ta có $\displaystyle I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x\cos x\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\cos x\mathrm{d}x.$

Lại có $\displaystyle I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x\overset{x=-t}{=}\int_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}}\frac{(-t)\cos(-t)}{\sqrt{1+(-t)^2}-t}\mathrm{d}(-t)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}}\frac{t\cos t}{\sqrt{1+t^2}-t}\mathrm{d}t$

$$=-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}t\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)\cos t\mathrm{d}t=-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\cos x\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\displaystyle 2I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\cos x\mathrm{d}x-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\cos x\mathrm{d}x=-2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x^2\cos x\mathrm{d}x$

$\longrightarrow I=-\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x^2\cos x\mathrm{d}x$. Tích phân từng phần hai lần ta được $I=2+\dfrac{\pi^2}{-36}+\dfrac{\sqrt{3}\pi}{-3}$

$\longrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-36 \\ c=-3 \end{cases} \longrightarrow P=a-b+c=35$. **Chọn C.**

Vấn đề 5. Tính tích phân hàm phân nhánh

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{khi } x\ge 0 \\ e^{2x} & \text{khi } x\le 0 \end{cases}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{3e^2-1}{2e^2}$. **B.** $I=\dfrac{7e^2+1}{2e^2}$. **C.** $I=\dfrac{9e^2-1}{2e^2}$. **D.** $I=\dfrac{11e^2-11}{2e^2}$.

Lời giải. Ta có $I=\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0} e^{2x}\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}(x+1)\mathrm{d}x=\dfrac{9e^2-1}{2e^2}$. **Chọn C.**

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, thỏa $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $\ln 15$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $4+\ln 15$.

Lời giải. Ta có $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}$

$\longrightarrow f(x)=\int \dfrac{2}{2x-1}\mathrm{d}x=\ln|2x-1|+C=\begin{cases} \ln(1-2x)+C_1 & ;x<\dfrac{1}{2} \\ \ln(2x-1)+C_2 & ;x>\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

- $f(0)=1\longrightarrow \ln(1-2.0)+C_1=1\to C_1=1$.
- $f(1)=2\longrightarrow \ln(2.1-1)+C_2=2\to C_2=2$.

Do đó $f(x)=\begin{cases} \ln(1-2x)+1 \text{ khi } x<\dfrac{1}{2} \\ \ln(2x-1)+2 \text{ khi } x>\dfrac{1}{2} \end{cases}\to \begin{cases} f(-1)=\ln 3+1 \\ f(3)=\ln 5+2 \end{cases}$

$\longrightarrow f(-1)+f(3)=3+\ln 5+\ln 3=3+\ln 15$. **Chọn C.**

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$, thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$, $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\dfrac{1}{3}$. Giá trị biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}\ln 20+\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$. **C.** $\ln 80+1$. **D.** $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{8}{5}+1$.

Lời giải. Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$\longrightarrow f(x)=\int\dfrac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x=\begin{cases} \dfrac{1}{3}\left[\ln(1-x)-\ln(-x-2)\right]+C_1 & ;x<-2 \\ \dfrac{1}{3}\left[\ln(1-x)-\ln(x+2)\right]+C_2 & ;-2<x<1. \\ \dfrac{1}{3}\left[\ln(x-1)-\ln(x+2)\right]+C_3 & ;x>1 \end{cases}$

- $f(0)=\dfrac{1}{3}\longrightarrow \dfrac{1}{3}\left[\ln(1-0)-\ln(0+2)\right]+C_2=\dfrac{1}{3}\longrightarrow C_2=\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$.
- $f(-3)-f(3)=0\longrightarrow C_1-C_3=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{10}$.

Ta có $f(-4)+f(-1)-f(4)=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{3}\ln 2-\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2}+C_2+C_1-C_3=\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$. **Chọn B.**

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(0;+\infty)\setminus\{e\}$, thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x(\ln x-1)}$, $f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\ln 6$ và $f\left(e^2\right)=3$. Giá trị biểu thức $f\left(\dfrac{1}{e}\right)+f\left(e^3\right)$ bằng

A. $3(\ln 2+1)$. **B.** $2\ln 2$. **C.** $3\ln 2+1$. **D.** $\ln 2+3$.

Lời giải. Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{x(\ln x-1)}$

$$\longrightarrow f(x)=\int\frac{1}{x(\ln x-1)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\ln x-1)}{(\ln x-1)}=\ln|\ln x-1|+C=\begin{cases}\ln(1-\ln x)+C_1 \text{ khi } x\in(0;e)\\ \ln(\ln x-1)+C_2 \text{ khi } x\in(e;+\infty)\end{cases}.$$

- $f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\ln 6\longrightarrow \ln\left(1-\ln\dfrac{1}{e^2}\right)+C_1=\ln 6\to C_1=\ln 2.$
- $f\left(e^2\right)=3\longrightarrow \ln\left(\ln e^2-1\right)+C_2=3\to C_2=3.$

Do đó $f(x)=\begin{cases}\ln(1-\ln x)+\ln 2 \text{ khi } x\in(0;e)\\ \ln(\ln x-1)+3 \text{ khi } x\in(e;+\infty)\end{cases}\to\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\ln 2+\ln 2\\ f\left(e^3\right)=\ln 2+3\end{cases}$

$\longrightarrow f\left(\dfrac{1}{e}\right)+f\left(e^3\right)=3(\ln 2+1)$. **Chọn C.**

Câu 35. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{1+\sin 2x}$ với $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. Biết $F(0)=1$, $F(\pi)=0$, tính giá trị biểu thức $P=F\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)-F\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

A. $P=0$. **B.** $P=2-\sqrt{3}$. **C.** $P=1$. **D.** Không tồn tại P.

Lời giải. Với x thuộc vào mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$ ta có

$$F(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin 2x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)^2}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C.$$

- $0;-\dfrac{\pi}{12}\in\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$ nên $F(0)-F\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{1}{2}\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{12}}^{0}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\xrightarrow{F(0)=1}F\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\pi;\dfrac{11\pi}{12}\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right)$ nên $F(\pi)-F\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)=\dfrac{1}{2}\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\xrightarrow{F(\pi)=0}F\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Vậy $P=F\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)-F\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)=1$. **Chọn C.**

Vấn đề 6. Tính tích phân dựa vào tính chất

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ, liên tục trên $[-4;4]$. Biết rằng $\int\limits_{-2}^{0}f(-x)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_{1}^{2}f(-2x)\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{4}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-10$. **B.** $I=-6$. **C.** $I=6$. **D.** $I=10$.

Lời giải. Do $f(x)$ là hàm lẻ nên $f(-x)=-f(x)$.

- Xét $A=\int\limits_{-2}^{0}f(-x)\mathrm{d}x=2$. Đặt $t=-x\longrightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases}x=-2\to t=2\\ x=0\to t=0\end{cases}$.

Khi đó $A=-\int\limits_{2}^{0}f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{2}f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x.$

● Xét $B=\int\limits_1^2 f(-2x)\mathrm{d}x=-\int\limits_1^2 f(2x)\mathrm{d}x$. Đặt $u=2x\longrightarrow \mathrm{d}u=2\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x=1\to u=2 \\ x=2\to u=4 \end{cases}$.

Khi đó $B=-\frac{1}{2}\int\limits_2^4 f(u)\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x\longrightarrow \int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x=-2B=-2.4=-8$.

Vậy $I=\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x=2-8=-6$. **Chọn B.**

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-1;6]$. Biết rằng $\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x=8$ và $\int\limits_1^3 f(-2x)\mathrm{d}x=3$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^6 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=5$. **C.** $I=11$. **D.** $I=14$.

Lời giải. Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int\limits_1^3 f(-2x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 f(2x)\mathrm{d}x=3$.

Xét $K=\int\limits_1^3 f(2x)\mathrm{d}x=3$. Đặt $t=2x\longrightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x=1\to t=2 \\ x=3\to t=6 \end{cases}$.

Khi đó $K=\frac{1}{2}\int\limits_2^6 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_2^6 f(x)\mathrm{d}x\longrightarrow \int\limits_2^6 f(x)\mathrm{d}x=2K=6$.

Vậy $I=\int\limits_{-1}^6 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_2^6 f(x)\mathrm{d}x=8+6=14$. **Chọn D.**

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[3;7]$, thỏa mãn $f(x)=f(10-x)$ với mọi $x\in[3;7]$ và $\int\limits_3^7 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int\limits_3^7 xf(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=20$. **B.** $I=40$. **C.** $I=60$. **D.** $I=80$.

Lời giải. Đặt $t=(3+7)-x\longrightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases} x=7\to t=3 \\ x=3\to t=7 \end{cases}$.

Khi đó $I=-\int\limits_7^3 (10-t)f(10-t)\mathrm{d}t=\int\limits_3^7 (10-t)f(10-t)\mathrm{d}t=\int\limits_3^7 (10-x)f(10-x)\mathrm{d}x$

$\overset{f(x)=f(10-x)}{=}\int\limits_3^7 (10-x)f(x)\mathrm{d}x=10\int\limits_3^7 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_3^7 xf(x)\mathrm{d}x=10\int\limits_3^7 f(x)\mathrm{d}x-I$.

Suy ra $2I=10\int\limits_3^7 f(x)\mathrm{d}x=10.4=40\longrightarrow I=20$. **Chọn A.**

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên đoạn $[-\pi;\pi]$, thỏa mãn $\int\limits_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=2018$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)}{2018^x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=0$. **B.** $I=\frac{1}{2018}$. **C.** $I=2018$. **D.** $I=4036$.

Lời giải. Đặt $x=-t\longrightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{cases} x=-\pi\to t=\pi \\ x=\pi\to t=-\pi \end{cases}$.

Khi đó $I=-\int\limits_{\pi}^{-\pi}\frac{f(-t)}{2018^{-t}+1}\mathrm{d}t=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(-t)}{2018^{-t}+1}\mathrm{d}t=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{2018^t f(-t)}{1+2018^t}\mathrm{d}t=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{2018^x f(-x)}{1+2018^x}\mathrm{d}x$.

Vì $y=f(x)$ là hàm số chẵn trên đoạn $[-\pi;\pi]$ nên $f(-x)=f(x)\longrightarrow I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{2018^x f(x)}{2018^x+1}\mathrm{d}x$.

Vậy $2I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)}{2018^x+1}\mathrm{d}x+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{2018^x f(x)}{2018^x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=2\int\limits_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=2.2018\to I=2018$. **Chọn C.**

Câu 40. Biết $\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}^+$. Tính $P=2a+b$.

A. $P=6$. **B.** $P=8$. **C.** $P=10$. **D.** $P=12$.

Lời giải. Gọi $I=\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$

Đặt $t=\pi-x\longrightarrow dt=-dx$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\to t=\pi\\ x=\pi\to t=0\end{cases}$.

Khi đó $I=-\int\limits_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin^{2018}(\pi-t)}{\sin^{2018}(\pi-t)+\cos^{2018}(\pi-t)}dt=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin^{2018}t}{\sin^{2018}t+\cos^{2018}t}dt=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx.$

Suy ra $2I=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx+\int\limits_{0}^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\pi\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx$

$\longrightarrow I=\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx=\frac{\pi}{2}\left[\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx\right].$

Đặt $x=u+\frac{\pi}{2}$ ta suy ra $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2018}u}{\sin^{2018}u+\cos^{2018}u}du=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx.$

Vậy $I=\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi^2}{4}\longrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=4\end{cases}\longrightarrow P=8.$ **Chọn B.**

Vấn đề 7. Kỹ thuật phương trình hàm

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn $2f(x)+f(-x)=\cos x$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$.

A. $I=-2$. **B.** $I=\frac{2}{3}$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=2$.

Lời giải. Từ giả thiết, thay x bằng $-x$ ta được $2f(-x)+f(x)=\cos x$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases}2f(x)+f(-x)=\cos x\\ 2f(-x)+f(x)=\cos x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4f(x)+2f(-x)=2\cos x\\ f(x)+2f(-x)=\cos x\end{cases}\longrightarrow f(x)=\frac{1}{3}\cos x.$

Khi đó $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\frac{1}{3}\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}.$ **Chọn B.**

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(-x)=\frac{1}{4+x^2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-2}^{2}f(x)dx$.

A. $I=-\frac{\pi}{10}$. **B.** $I=-\frac{\pi}{20}$. **C.** $I=\frac{\pi}{20}$. **D.** $I=\frac{\pi}{10}$.

Lời giải. Từ giả thiết, thay x bằng $-x$ ta được $2f(-x)+3f(x)=\frac{1}{4+x^2}$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases}2f(x)+3f(-x)=\frac{1}{4+x^2}\\ 2f(-x)+3f(x)=\frac{1}{4+x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4f(x)+6f(-x)=\frac{2}{4+x^2}\\ 9f(x)+6f(-x)=\frac{3}{4+x^2}\end{cases}\longrightarrow f(x)=\frac{1}{5(4+x^2)}.$

Khi đó $I=\int\limits_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{5}\int\limits_{-2}^{2}\frac{1}{4+x^2}dx=\frac{\pi}{20}.$ **Chọn C.**

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}f(x)dx$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=\frac{3}{5}$. **C.** $I=\frac{2}{3}$. **D.** $I=\frac{4}{3}$.

Lời giải. Từ giả thiết, thay x bằng $1-x$ ta được $(1-x)^2f(1-x)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4$

$\Leftrightarrow(x^2-2x+1)f(1-x)+f(x)=1+2x-6x^2+4x^3-x^4.\qquad(1)$

Ta có $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4\longrightarrow f(1-x)=2x-x^4-x^2f(x)$. Thay vào (1) ta được

$(x^2-2x+1)\left[2x-x^4-x^2f(x)\right]+f(x)=1+2x-6x^2+4x^3-x^4$

$\Leftrightarrow(1-x^2+2x^3-x^4)f(x)=x^6-2x^5+2x^3-2x^2+1$

$\Leftrightarrow\left(1-x^2+2x^3-x^4\right)f(x)=\left(1-x^2\right)\left(1-x^2+2x^3-x^4\right)$

$\longrightarrow f(x)=1-x^2.$

Vậy $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\left.\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\right|_0^1=\frac{2}{3}$. **Chọn C.**

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$ và thỏa mãn $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{5}{2}$. **D.** $I=\frac{7}{2}$.

Lời giải. Từ giả thiết, thay x bằng $\frac{1}{x}$ ta được $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x}$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases}f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x\\ f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x\\ 4f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{6}{x}\end{cases}\longrightarrow f(x)=\frac{2}{x}-x.$

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)dx=\left.\left(-\frac{2}{x}-x\right)\right|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{2}$. **Chọn B.**

Cách khác. Từ $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x\longrightarrow f(x)=3x-2f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(3-2\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)\mathrm{d}x=3\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x-2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x.$

Xét $J=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\frac{1}{x}$, suy ra $\mathrm{d}t=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-t^2\mathrm{d}x\longrightarrow\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\to t=2\\ x=2\to t=\frac{1}{2}\end{cases}$. Khi đó $J=\int\limits_{2}^{\frac{1}{2}}tf(t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=I.$

Vậy $I=3\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x-2I\longrightarrow I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$.

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi}{20}$. **B.** $\frac{\pi}{16}$. **C.** $\frac{\pi}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải. Từ giả thiết, thay x bằng $1-x$ ta được $2f(1-x)+3f(x)=\sqrt{2x-x^2}$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases}2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}\\ 2f(1-x)+3f(x)=\sqrt{2x-x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4f(x)+6f(1-x)=2\sqrt{1-x^2}\\ 9f(x)+6f(1-x)=3\sqrt{2x-x^2}\end{cases}$

$\longrightarrow f(x)=\frac{3\sqrt{2x-x^2}-2\sqrt{1-x^2}}{5}.$

Vậy $I=\frac{1}{5}\int\limits_0^1\left(3\sqrt{2x-x^2}-2\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{20}$. **Chọn A.**

Cách khác. Từ $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}\longrightarrow f(x)=\frac{1}{2}\left[\sqrt{1-x^2}-3f(1-x)\right]$.

Khi đó $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x-3\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x\right].$

Xét $J=\int\limits_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $t=1-x\longrightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=0\to t=1 \\ x=1\to t=0 \end{cases}$. Khi đó $J=-\int\limits_1^0 f(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=I$.

Vậy $I=\frac{1}{2}\left[\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x-3I\right]\longrightarrow I=\frac{1}{5}\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{20}$.

Vấn đề 8. Kỹ thuật biến đổi

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f(x)f'(x)=3x^5+6x^2$. Biết rằng $f(0)=2$, tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2)=64$. **B.** $f^2(2)=81$. **C.** $f^2(2)=100$. **D.** $f^2(2)=144$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có $\int f(x).f'(x)\,\mathrm{d}x=\int (3x^5+6x^2)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2}=\frac{x^6}{2}+2x^3+C$.

Thay $x=0$ vào hai vế, ta được $\frac{f^2(0)}{2}=C\Rightarrow C=2$.

Suy ra $f^2(x)=x^6+4x^3+4\longrightarrow f^2(2)=2^6+4.2^3+4=100$. **Chọn C.**

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên $[1;+\infty)$, thỏa $f(1)=0$, $e^{2f(x)}.[f'(x)]^2=4x^2-4x+1$ với mọi $x\in[1;+\infty)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $-1<f'(4)<0$. **B.** $0<f'(4)<1$. **C.** $1<f'(4)<2$. **D.** $2<f'(4)<3$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $e^{f(x)}f'(x)=2x-1$ (do $f'(x)$ không âm trên $[1;+\infty)$)

$\longrightarrow \int e^{f(x)}f'(x)\,\mathrm{d}x=\int (2x-1)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow e^{f(x)}=x^2-x+C$.

Thay $x=1$ vào hai vế, ta được $e^{f(1)}=1^2-1+C\Rightarrow C=1$.

Suy ra $e^{f(x)}=x^2-x+1\Rightarrow f(x)=\ln(x^2-x+1)\Rightarrow f'(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+1}\longrightarrow f'(4)=\frac{7}{13}$. **Chọn B.**

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải. Nhận thấy được $[f'(x)]^2+f(x).f''(x)=[f(x).f'(x)]'$.

Do đó giả thiết tương đương với $[f(x).f'(x)]'=15x^4+12x$.

Suy ra $f(x).f'(x)=\int (15x^4+12x)\,\mathrm{d}x=3x^5+6x^2+C\xrightarrow{f(0)=f'(0)=1.} C=1$

$\longrightarrow f(x).f'(x)=3x^5+6x^2+1$

$\longrightarrow \int f(x).f'(x)\,\mathrm{d}x=\int (3x^5+6x^2+1)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2}=\frac{x^6}{2}+2x^3+x+C'$.

Thay $x=0$ vào hai vế ta được $\frac{f^2(0)}{2}=C'\Rightarrow C'=\frac{1}{2}$.

Vậy $f^2(x)=x^6+4x^3+2x+1\longrightarrow f^2(1)=8$. **Chọn C.**

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(x)>0,\forall x\in[1;2]$. Biết rằng $\int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x=10$ và $\int\limits_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\ln 2$. Tính $f(2)$.

A. $f(2)=-20$. **B.** $f(2)=-10$. **C.** $f(2)=10$. **D.** $f(2)=20$.

Lời giải. Ta có $\int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow f(x)\Big|_1^2=10\Leftrightarrow f(2)-f(1)=10$. (1)

Lại có $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln 2 \Leftrightarrow \ln|f(x)|\Big|_1^2 = \ln 2 \Leftrightarrow \ln[f(x)]\Big|_1^2 = \ln 2$ (do $f(x) > 0, \forall x \in [1;2]$)

$\Leftrightarrow \ln f(2) - \ln f(1) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln\frac{f(2)}{f(1)} = \ln 2 \Leftrightarrow \frac{f(2)}{f(1)} = 2.$ $\qquad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $f(2) = 20$. **Chọn B.**

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$, thỏa mãn $f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) + 2f(x) = 0$. Biết rằng $f(1) = 1$, giá trị của $f(-1)$ bằng

A. e^{-2}. **B.** e^3. **C.** e^4. **D.** 3.

Lời giải. Ta có $f'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2$ (do $f(x) > 0$)

$\longrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int -2dx \Leftrightarrow \ln f(x) = -2x + C$ (do $f(x) > 0$).

Mà $f(1) = 1 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow \ln f(x) = -2x + 2 \longrightarrow f(x) = e^{-2x+2} \longrightarrow f(-1) = e^4$. **Chọn C.**

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn

$$\begin{cases} f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ f'(x) = -e^x f^2(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Tính giá trị của $f(\ln 2)$.

A. $f(\ln 2) = \frac{1}{4}$. **B.** $f(\ln 2) = \frac{1}{3}$.

C. $f(\ln 2) = \ln 2 + \frac{1}{2}$. **D.** $f(\ln 2) = \ln^2 2 + \frac{1}{2}$.

Lời giải. Ta có $f'(x) = -e^x f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -e^x$ (do $f(x) > 0$)

$\longrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \int -e^x dx \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = -e^x + C \Rightarrow f(x) = \frac{1}{e^x - C}$.

Thay $x = 0$ ta được $f(0) = \frac{1}{e^0 - C} \xrightarrow{f(0)=\frac{1}{2}} C = -1$.

Vậy $f(x) = \frac{1}{e^x + 1} \longrightarrow f(\ln 2) = \frac{1}{e^{\ln 2} + 1} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$. **Chọn B.**

Câu 52. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$, biết $f'(x) + (2x+3)f^2(x) = 0$, $f(x) > 0$ với mọi $x > 0$ và $f(1) = \frac{1}{6}$. Tính $P = 1 + f(1) + f(2) + ... + f(2018)$.

A. $P = \frac{1009}{2020}$. **B.** $P = \frac{2019}{2020}$. **C.** $P = \frac{3029}{2020}$. **D.** $P = \frac{4039}{2020}$.

Lời giải. Ta có $f'(x) + (2x+3)f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -(2x+3)$ (do $f(x) > 0$)

$\longrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = -\int (2x+3)dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = -x^2 - 3x + C \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x - C}$.

Mà $f(1) = \frac{1}{6} \longrightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{1^2 + 3.1 - C} \Leftrightarrow C = -2 \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

Suy ra $P = 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}\right) = \frac{3029}{2020}$. **Chọn C.**

Câu 53. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[0;\sqrt{3}\right]$, thỏa mãn $f(x) > -1$, $f(0) = 0$ và $f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1}$. Giá trị của $f\left(\sqrt{3}\right)$ bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}} = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \longrightarrow \int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}\mathrm{d}x = \int \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 2\int \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+1}}\mathrm{d}x = 2\int \dfrac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)+1} = 2\sqrt{x^2+1}+C$

Mà $f(0)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=x^2 \longrightarrow f(\sqrt{3})=3.$ **Chọn B.**

Câu 54. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $[1;4]$, đồng biến trên $[1;4]$, thoản mãn $x+2xf(x)=[f'(x)]^2$ với mọi $x\in[1;4]$. Biết rằng $f(1)=\dfrac{3}{2}$, tính tích phân $I=\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{1186}{45}$. **B.** $I=\dfrac{1187}{45}$. **C.** $I=\dfrac{1188}{45}$. **D.** $I=\dfrac{9}{2}$.

Lời giải. Nhận xét: Do $f(x)$ đồng biến trên $[1;4]$ nên $f'(x)\ge 0,\ \forall x\in[1;4]$.

Từ giả thiết ta có $x[1+2f(x)]=[f'(x)]^2 \longrightarrow f'(x)=\sqrt{x}.\sqrt{1+2f(x)},\ \forall x\in[1;4]$

$\longrightarrow \dfrac{2f'(x)}{2\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x} \longrightarrow \int \dfrac{2f'(x)}{2\sqrt{1+2f(x)}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{x}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \sqrt{1+2f(x)}=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$

Mà $f(1)=\dfrac{3}{2}\Rightarrow C=\dfrac{4}{3}\longrightarrow f(x)=\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{4}{3}\right)^2-1}{2}=\dfrac{2}{9}x^3+\dfrac{8}{9}x\sqrt{x}+\dfrac{7}{18}$

$\longrightarrow \int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1186}{45}.$ **Chọn A.**

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, thỏa $f(x).f'(x)=\cos x\sqrt{1+f^2(x)}$ với mọi $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ và $f(0)=\sqrt{3}$. Giá trị của $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có $\dfrac{2f(x).f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}}=\cos x,\ \forall x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\longrightarrow \int\dfrac{2f(x).f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}}\mathrm{d}x=\int\cos x\mathrm{d}x \Leftrightarrow \sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+C.$

Mà $f(0)=\sqrt{3}\Rightarrow C=2\longrightarrow f(x)=\sqrt{(\sin x+2)^2-1}=\sqrt{\sin^2 x+4\sin x+3},\ \forall x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\longrightarrow f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}.$ **Chọn D.**

Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên $[0;3]$, thỏa $f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}$ với mọi $x\in[0;3]$ và $f(0)=0$. Giá trị của $f(3)$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{11}$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có $\dfrac{2f(x).f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}}=2x,\ \forall x\in[0;3]$

$\longrightarrow \int\dfrac{2f(x).f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}}\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{d}x \Leftrightarrow \sqrt{1+f^2(x)}=x^2+C.$

Mà $f(0)=0\Rightarrow C=1\longrightarrow f(x)=\sqrt{(x^2+1)^2-1}=\sqrt{x^4+2x^2},\ \forall x\in[0;3]$

$\longrightarrow f(3)=3\sqrt{11}.$ **Chọn D.**

Câu 57. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm không âm trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(x)>0$ với mọi $x\in[0;1]$ và $[f(x)]^4.[f'(x)]^2.(x^2+1)=1+[f(x)]^3$. Biết $f(0)=2$, hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây.

A. $\frac{3}{2}<f(1)<2.$ **B.** $2<f(1)<\frac{5}{2}.$ **C.** $\frac{5}{2}<f(1)<3.$ **D.** $3<f(1)<\frac{7}{2}.$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $[f(x)]^2.f'(x).\sqrt{x^2+1}=\sqrt{1+[f(x)]^3} \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^2.f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^3}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\longrightarrow \int_0^1 \frac{[f(x)]^2.f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^3}}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{2}{3}\times\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\left(1+[f(x)]^3\right)}{2\sqrt{1+[f(x)]^3}}=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\times\sqrt{1+[f(x)]^3}\Big|_0^1=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1 \xrightarrow{f(0)=2} f(1)\approx 2{,}605.$$ **Chọn C.**

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$, thỏa mãn $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ và $f(1)=-2\ln 2$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$ với $a,\ b\in\mathbb{Q}$, tính $P=a^2+b^2$.

A. $P=\frac{1}{2}.$ **B.** $P=\frac{3}{4}.$ **C.** $P=\frac{13}{4}.$ **D.** $P=\frac{9}{2}.$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $\frac{x}{x+1}f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x}{x+1},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}.$

Nhận thấy $\frac{x}{x+1}f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x)=\left[f(x).\frac{x}{x+1}\right]'$. Do đó giả thiết tương đương với

$$\left[f(x).\frac{x}{x+1}\right]'=\frac{x}{x+1},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}.$$

Suy ra $f(x).\frac{x}{x+1}=\int\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=x-\ln|x+1|+C.$

Mà $f(1)=-2\ln 2\Rightarrow C=-1\longrightarrow f(x).\frac{x}{x+1}=x-\ln|x+1|-1.$

Cho $x=2$ ta được $f(2).\frac{2}{3}=2-\ln 3-1\Rightarrow f(2)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ln 3\longrightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\ b=-\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow P=\frac{9}{2}.$ **Chọn D.**

Câu 59. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f'(0)=-1$ và $\begin{cases}[f'(x)]^2=f''(x)\\ f'(x)\neq 0\end{cases}$ với mọi $x\in[0;1]$. Đặt $P=f(1)-f(0)$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $-2\le P\le -1.$ **B.** $-1\le P\le 0.$ **C.** $0\le P\le 1.$ **D.** $1\le P\le 2.$

Lời giải. Nhận thấy $P=f(1)-f(0)=\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$ nên ta cần tìm $f'(x)$.

Từ giả thiết ta có $\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}=1\longrightarrow\int\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\mathrm{d}x=\int 1\mathrm{d}x\Leftrightarrow -\frac{1}{f'(x)}=x+C\Leftrightarrow f'(x)=-\frac{1}{x+C}.$

Mà $f'(0)=-1\Rightarrow C=1\longrightarrow f'(x)=-\frac{1}{x+1}.$

Vậy $P=\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=-\ln 2\approx -0{,}69.$ **Chọn B.**

Câu 60. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$, thỏa mãn $f'(0).f'(2)\neq 0$ và $g(x).f'(x)=x(x-2)e^x$.

Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x).g'(x)\mathrm{d}x.$

A. $I=-4.$ **B.** $I=4.$ **C.** $I=e-2.$ **D.** $I=2-e.$

Lời giải. Từ giả thiết $f'(0).f'(2)\neq 0\longrightarrow\begin{cases}f'(0)\neq 0\\ f'(2)\neq 0\end{cases}.$

Do đó từ $g(x).f'(x)=x(x-2)e^x$, suy ra $\begin{cases} g(2)=\dfrac{2(2-2)e^x}{f'(2)}=0 \\ g(0)=\dfrac{0(0-2)e^x}{f'(0)}=0 \end{cases}$.

Tích phân từng phần ta được $I=\left[f(x).g(x)\right]\Big|_0^2-\int\limits_0^2 g(x).f'(x)\mathrm{d}x$

$=f(2).g(2)-f(0).g(0)-\int\limits_0^2 x(x-2)e^x\mathrm{d}x=-\int\limits_0^2 x(x-2)e^x\mathrm{d}x=4.$ **Chọn B.**

Câu 61. Cho hàm số $f(x)>0$ xác định và có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\begin{cases} g(x)=1+2018\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t \\ g(x)=f^2(x) \end{cases}$. Tính $I=\int\limits_0^1 \sqrt{g(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{1009}{2}$. **B.** $I=505$. **C.** $I=\dfrac{1011}{2}$. **D.** $I=\dfrac{2019}{2}$.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} g'(x)=2018f(x) \\ g'(x)=2f'(x).f(x) \end{cases}\longrightarrow 2018f(x)=2f'(x).f(x)$

$\Leftrightarrow 2f(x)\left[1009-f'(x)\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0\ \text{(loại)} \\ f'(x)=1009\longrightarrow f(x)=1009x+C \end{array}\right.$.

Thay ngược lại, ta được $1+2018\int\limits_0^x\left[1009t+C\right]\mathrm{d}t=(1009x+C)^2$

$$\Leftrightarrow 1+2018\left(\frac{1009}{2}t^2+Ct\right)\Bigg|_0^x=(1009x+C)^2\Leftrightarrow C^2=1.$$

Suy ra $f(x)=1009x+1$ hoặc $f(x)=1009x-1$ (loại vì $f(x)>0\ \forall x\in[0;1]$).

Khi đó $I=\int\limits_0^1\sqrt{g(x)}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(1009x+1)\mathrm{d}x=\dfrac{1011}{2}$. **Chọn C.**

Câu 62. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(1)+g(1)=4 \\ g(x)=-xf'(x) \\ f(x)=-xg'(x) \end{cases}$ với mọi $x\in[1;4]$. Tính tích phân $I=\int\limits_1^4\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=3\ln 2$. **B.** $I=4\ln 2$. **C.** $I=6\ln 2$. **D.** $I=8\ln 2$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có $f(x)+g(x)=-x.f'(x)-x.g'(x)$

$\Leftrightarrow\left[f(x)+x.f'(x)\right]+\left[g(x)+x.g'(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[x.f(x)\right]'+\left[x.g(x)\right]'=0$

$\longrightarrow x.f(x)+x.g(x)=C\Rightarrow f(x)+g(x)=\dfrac{C}{x}$.

Mà $f(1)+g(1)=4\Rightarrow C=4\longrightarrow I=\int\limits_1^4\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\dfrac{4}{x}\mathrm{d}x=8\ln 2$. **Chọn A.**

Câu 63. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$, thỏa mãn $f(1)=g(1)=0$ và

$$\begin{cases} \dfrac{x}{(x+1)^2}g(x)+2017x=(x+1)f'(x) \\ \dfrac{x^3}{x+1}g'(x)+f(x)=2018x^2 \end{cases},\ \forall x\in[1;2].$$

Tính tích phân $I=\int\limits_1^2\left[\dfrac{x}{x+1}g(x)-\dfrac{x+1}{x}f(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=2$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có $\begin{cases}\frac{1}{(x+1)^2}g(x)-\frac{(x+1)}{x}f'(x)=-2017\\ \frac{x}{x+1}g'(x)+\frac{1}{x^2}f(x)=2018\end{cases}$, $\forall x\in[1;2]$.

Suy ra $\left[\frac{1}{(x+1)^2}g(x)+\frac{x}{x+1}g'(x)\right]-\left[\frac{(x+1)}{x}f'(x)-\frac{1}{x^2}f(x)\right]=1\Leftrightarrow\left[\frac{x}{x+1}g(x)\right]'-\left[\frac{(x+1)}{x}f(x)\right]'=1$

$\longrightarrow\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{(x+1)}{x}f(x)=x+C.$

Mà $f(1)=g(1)=0\Rightarrow C=-1\longrightarrow I=\int\limits_1^2\left[\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)\right]dx=\int\limits_1^2(x-1)dx=\frac{1}{2}$. **Chọn A.**

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[0;3]$, thỏa mãn $\begin{cases}f(3-x).f(x)=1\\ f(x)\neq -1\end{cases}$ với mọi $x\in[0;3]$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^3\frac{xf'(x)}{[1+f(3-x)]^2.f^2(x)}dx$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{2}$.

Lời giải. Từ giả thiết $\begin{cases}f(3-x).f(x)=1\\ f(0)=\frac{1}{2}\end{cases}\xrightarrow{x=3}f(3)=2.$

Ta có $[1+f(3-x)]^2.f^2(x)\overset{f(3-x).f(x)=1}{=}[1+f(x)]^2$.

Tích phân $I=\int\limits_0^3\frac{xf'(x)}{[1+f(x)]^2}dx=-\int\limits_0^3 xd\left(\frac{1}{1+f(x)}\right)=-\frac{x}{1+f(x)}\Big|_0^3+\int\limits_0^3\frac{1}{1+f(x)}dx=-1+J.$

Tính $J=\int\limits_0^3\frac{1}{1+f(x)}dx\overset{t=3-x}{=}-\int\limits_3^0\frac{1}{1+f(3-t)}dt=\int\limits_0^3\frac{1}{1+f(3-t)}dt=\int\limits_0^3\frac{1}{1+f(3-x)}dx.$

Suy ra $2J=\int\limits_0^3\frac{1}{1+f(x)}dx+\int\limits_0^3\frac{1}{1+f(3-x)}dx\overset{f(3-x).f(x)=1}{=}\int\limits_0^3 1.dx=3\Rightarrow J=\frac{3}{2}$. Vậy $I=\frac{1}{2}$. **Chọn A.**

Câu 65. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $af(b)+bf(a)=1$ với mọi $a,\ b\in[0;1]$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)dx$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=\frac{1}{4}$. **C.** $I=\frac{\pi}{2}$. **D.** $I=\frac{\pi}{4}$.

Lời giải. Đặt $a=\sin x,\ b=\cos x$ với $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Từ giả thiết, suy ra $\sin xf(\cos x)+\cos xf(\sin x)=1$

$$\longrightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xf(\cos x)dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xf(\sin x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Ta có $\begin{cases}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xf(\cos x)dx\overset{t=\cos x}{=}-\int\limits_1^0 f(t)dt=\int\limits_0^1 f(x)dx\\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xf(\sin x)dx\overset{t=\sin x}{=}\int\limits_0^1 f(t)dt=\int\limits_0^1 f(x)dx\end{cases}$. Do đó $(1)\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{4}$. **Chọn D.**

Vấn đề 9. Kỹ thuật đạo hàm đúng

Câu 66. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thoả mãn $3f(x)+xf'(x)=x^{2018}$ với mọi $x\in[0;1]$. Tính $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{1}{2018\times 2021}$. **B.** $I=\dfrac{1}{2019\times 2020}$. **C.** $I=\dfrac{1}{2019\times 2021}$. **D.** $I=\dfrac{1}{2018\times 2019}$.

Lời giải. Từ giả thiết $3f(x)+xf'(x)=x^{2018}$, nhân hai vế cho x^2 ta được

$$3x^2f(x)+x^3f'(x)=x^{2020}\longleftrightarrow\left[x^3f(x)\right]'=x^{2020}.$$

Suy ra $x^3f(x)=\int x^{2020}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{2021}}{2021}+C.$

Thay $x=0$ vào hai vế ta được $C=0\longrightarrow f(x)=\dfrac{x^{2018}}{2021}.$

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{1}{2021}x^{2018}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2021}.\dfrac{1}{2019}x^{2019}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2021\times 2019}$. **Chọn C.**

Nhận xét: Ý tưởng nhân hai vế cho x^2 là để thu được đạo hàm đúng dạng $(uv)'=u'v+uv'$.

Câu 67. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;4]$, thỏa mãn $f(x)+f'(x)=e^{-x}\sqrt{2x+1}$ với mọi $x\in[0;4]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $e^4f(4)-f(0)=\dfrac{26}{3}$. **B.** $e^4f(4)-f(0)=3e$.

C. $e^4f(4)-f(0)=e^4-1$. **D.** $e^4f(4)-f(0)=3$.

Lời giải. Nhân hai vế cho e^x để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$e^xf(x)+e^xf'(x)=\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow\left[e^xf(x)\right]'=\sqrt{2x+1}.$$

Suy ra $e^xf(x)=\int\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C.$

Vậy $e^4f(4)-f(0)=\dfrac{26}{3}$. **Chọn A.**

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018x^{2017}e^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2018$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1)=2018e^{-2018}$. **B.** $f(1)=2017e^{2018}$. **C.** $f(1)=2018e^{2018}$. **D.** $f(1)=2019e^{2018}$.

Lời giải. Nhân hai vế cho e^{-2018x} để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$f'(x)e^{-2018x}-2018f(x)e^{-2018x}=2018x^{2017}\Leftrightarrow\left[f(x)e^{-2018x}\right]'=2018x^{2017}.$$

Suy ra $f(x)e^{-2018x}=\int 2018x^{2017}\mathrm{d}x=x^{2018}+C.$

Thay $x=0$ vào hai vế ta được $C=2018\longrightarrow f(x)=\left(x^{2018}+2018\right)e^{2018x}.$

Vậy $f(1)=2019e^{2018}$. **Chọn D.**

Câu 69. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)+xf(x)=2xe^{-x^2}$ và $f(0)=-2$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=e$. **B.** $f(1)=\dfrac{1}{e}$. **C.** $f(1)=\dfrac{2}{e}$. **D.** $f(1)=-\dfrac{2}{e}$.

Lời giải. Nhân hai vế cho $e^{\frac{x^2}{2}}$ để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$f'(x)e^{\frac{x^2}{2}}+f(x)xe^{\frac{x^2}{2}}=2xe^{-\frac{x^2}{2}}\Leftrightarrow\left[e^{\frac{x^2}{2}}f(x)\right]'=2xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Suy ra $e^{\frac{x^2}{2}}f(x)=\int 2xe^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=-2e^{-\frac{x^2}{2}}+C.$

Thay $x=0$ vào hai vế ta được $C=0\longrightarrow f(x)=-2e^{-x^2}.$

Vậy $f(1)=-2e^{-1}=-\dfrac{2}{e}$. **Chọn D.**

Câu 70. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn hệ thức $f(x)+\tan xf'(x)=\frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3$ trong đó $a,\ b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A. $P=-\frac{4}{9}$. **B.** $P=-\frac{2}{9}$. **C.** $P=\frac{7}{9}$. **D.** $P=\frac{14}{9}$.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $\cos xf(x)+\sin xf'(x)=\frac{x}{\cos^2 x}\Leftrightarrow\left[\sin xf(x)\right]'=\frac{x}{\cos^2 x}$.

Suy ra $\sin xf(x)=\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=x\tan x+\ln|\cos x|+C$.

- Với $x=\frac{\pi}{3}\longrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}.\sqrt{3}-\ln 2\longrightarrow\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}.\pi\sqrt{3}-2\ln 2+2C$.
- Với $x=\frac{\pi}{6}\longrightarrow\frac{1}{2}f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}.\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\ln 3-\ln 2+C\longrightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{9}.\pi\sqrt{3}+\ln 3-2\ln 2+2C$.

Suy ra $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{9}\pi\sqrt{3}-\ln 3\longrightarrow\begin{cases}a=\frac{5}{9}\\ b=-1\end{cases}\longrightarrow P=a+b=-\frac{4}{9}$. **Chọn A.**

Vấn đề 10. Kỹ thuật đưa về bình phương loại 1

Câu 71. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}$. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=0$. **B.** $I=\frac{\pi}{4}$. **C.** $I=1$. **D.** $I=\frac{\pi}{2}$.

Lời giải. Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=-\frac{2-\pi}{2}$.

Do đó giả thiết tương đương với $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0,\ \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Suy ra $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\longrightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=0$. **Chọn A.**

Câu 72. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa $\int_0^1\left[f^2(x)+2\ln^2\frac{2}{e}\right]\mathrm{d}x=2\int_0^1\left[f(x)\ln(x+1)\right]\mathrm{d}x$. Tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\ln\frac{e}{4}$. **B.** $I=\ln\frac{4}{e}$. **C.** $I=\ln\frac{e}{2}$. **D.** $I=\ln\frac{2}{e}$.

Lời giải. Bằng phương pháp tích phân từng phần ta tính được

$$\int_0^1\ln^2(x+1)\mathrm{d}x=2\ln^2\frac{2}{e}=\int_0^1 2\ln^2\frac{2}{e}\mathrm{d}x.$$

Do đó giả thiết tương đương với $\int_0^1\left[f(x)-\ln(1+x)\right]^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow f(x)\equiv\ln(1+x),\ \forall x\in[0;1]$.

Suy ra $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=\ln\frac{4}{e}$. **Chọn B.**

Câu 73. Cho hàm số $f(x)$ có đạo liên tục trên $[0;1]$, $f(x)$ và $f'(x)$ đều nhận giá trị dương trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=2$ và $\int_0^1\left[f'(x).\left[f(x)\right]^2+1\right]\mathrm{d}x=2\int_0^1\sqrt{f'(x)}.f(x)\mathrm{d}x$. Tính $I=\int_0^1\left[f(x)\right]^3\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{15}{4}$. **B.** $I=\dfrac{15}{2}$. **C.** $I=\dfrac{17}{2}$. **D.** $I=\dfrac{19}{2}$.

Lời giải. Giả thiết tương đương với $\int\limits_0^1\left[\sqrt{f'(x)}.f(x)-1\right]^2\mathrm{d}x=0$

$$\longrightarrow\sqrt{f'(x)}.f(x)=1,\ \forall x\in[0;1]\longrightarrow f'(x)f^2(x)=1\longrightarrow\int f'(x)f^2(x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x$$

$$\longrightarrow\frac{f^3(x)}{3}=x+C\xrightarrow{f(0)=2}C=\frac{8}{3}.$$

Vậy $f^3(x)=3x+8\longrightarrow I=\int\limits_0^1[f(x)]^3\,\mathrm{d}x=\dfrac{19}{2}$. **Chọn D.**

Câu 74. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=1$, $3\int\limits_0^1\left[f'(x).[f(x)]^2+\dfrac{1}{9}\right]\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}.f(x)\mathrm{d}x$. Tính $I=\int\limits_0^1[f(x)]^3\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{3}{2}$. **B.** $I=\dfrac{5}{4}$. **C.** $I=\dfrac{5}{6}$. **D.** $I=\dfrac{7}{6}$.

Lời giải. Giả thiết $\Leftrightarrow 3\int\limits_0^1\left[\sqrt{f'(x)}.f(x)\right]^2\mathrm{d}x+\dfrac{1}{3}=2\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}.f(x)\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[3\sqrt{f'(x)}.f(x)\right]^2\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1 3\sqrt{f'(x)}.f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[3\sqrt{f'(x)}.f(x)-1\right]^2\mathrm{d}x=0$$

$$\longrightarrow 3\sqrt{f'(x)}.f(x)-1=0,\ \forall x\in[0;1]\longrightarrow 9f'(x).f^2(x)=1\longrightarrow\int 9f'(x).f^2(x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x$$

$$\longrightarrow 9.\frac{f^3(x)}{3}=x+C\xrightarrow{f(0)=1}C=3.$$

Vậy $f^3(x)=\dfrac{1}{3}x+1\longrightarrow\int\limits_0^1[f(x)]^3\,\mathrm{d}x=\dfrac{7}{6}$. **Chọn D.**

Câu 75. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa $f(1)-f(0)=1$ và $\int\limits_0^1 f'(x)\left[f^2(x)+1\right]\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1[f(x)]^3\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{33}-27}{18}$. **C.** $\dfrac{5\sqrt{33}}{18}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{33}+54}{18}$.

Lời giải. Nhóm hằng đẳng thức ta có $\int\limits_0^1 f'(x)\left[f^2(x)+1\right]\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f'(x)f^2(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[\sqrt{f'(x)}f(x)-1\right]^2\mathrm{d}x+\underbrace{\int\limits_0^1\left[f'(x)-1\right]\mathrm{d}x}_{=0\text{ vì }f(1)-f(0)=1}=0$$

$$\longrightarrow\sqrt{f'(x)}.f(x)=1,\ \forall x\in[0;1]\longrightarrow f'(x)f^2(x)=1\longrightarrow\int f'(x)f^2(x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x$$

$$\longrightarrow\frac{f^3(x)}{3}=x+C\longrightarrow f^3(x)=3x+3C\xrightarrow{f(1)-f(0)=1}C=\frac{5\sqrt{33}-27}{54}.$$

Vậy $f^3(x)=3x+\dfrac{5\sqrt{33}-27}{18}\longrightarrow\int\limits_0^1[f(x)]^3\,\mathrm{d}x=\dfrac{5\sqrt{33}}{18}$. **Chọn C.**

Vấn đề 11. Kỹ thuật đưa về bình phương loại 2
Kỹ thuật Holder

Câu 76. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$ và $\int\limits_0^1[f(x)]^2\,\mathrm{d}x=4$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1[f(x)]^3\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 80.

Lời giải. Ở đây các hàm xuất hiện dưới dấu tích phân là $\left[f(x)\right]^2$, $xf(x)$, $f(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f(x)+\alpha x+\beta\right]^2$.

Với mỗi số thực $\alpha,\ \beta$ ta có $\int_0^1\left[f(x)+\alpha x+\beta\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x+2\int_0^1(\alpha x+\beta)f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1(\alpha x+\beta)^2\mathrm{d}x$

$$=4+2(\alpha+\beta)+\frac{\alpha^2}{3}+\alpha\beta+\beta^2.$$

Ta cần tìm $\alpha,\ \beta$ sao cho $\int_0^1\left[f(x)+\alpha x+\beta\right]^2\mathrm{d}x=0$ hay $4+2(\alpha+\beta)+\frac{\alpha^2}{3}+\alpha\beta+\beta^2=0$

$\Leftrightarrow \alpha^2+(3\beta+6)\alpha+3\beta^2+6\beta+12=0.$ Để tồn tại α thì $\Delta=(3\beta+6)^2-4\left(3\beta^2+6\beta+12\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow -3\beta^2+12\beta-12\geq 0\Leftrightarrow -3(\beta-2)^2\geq 0\Leftrightarrow \beta=2\longrightarrow \alpha=-6.$

Vậy $\int_0^1\left[f(x)-6x+2\right]^2\mathrm{d}x=0\longrightarrow f(x)=6x-2,\ \forall x\in[0;1]\longrightarrow \int_0^1\left[f(x)\right]^3\mathrm{d}x=10.$ **Chọn C.**

Câu 77. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{x}f(x)\mathrm{d}x=1$ và $\int_0^1\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x=5.$ Giá trị của tích phân $\int_0^1\left[f(x)\right]^3\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{6}{5}$. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải. Ở đây các hàm xuất hiện dưới dấu tích phân là $\left[f(x)\right]^2$, $xf(x)$, $\sqrt{x}f(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f(x)+\alpha x+\beta\sqrt{x}\right]^2$.

Với mỗi số thực $\alpha,\ \beta$ ta có

$$\int_0^1\left[f(x)+\alpha x+\beta\sqrt{x}\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x+2\int_0^1\left(\alpha x+\beta\sqrt{x}\right)f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1\left(\alpha x+\beta\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=5+2(\alpha+\beta)+\frac{\alpha^2}{3}+\frac{4\alpha\beta}{5}+\frac{\beta^2}{2}.$$

Ta cần tìm $\alpha,\ \beta$ sao cho $\int_0^1\left[f(x)+\alpha x+\beta\sqrt{x}\right]^2\mathrm{d}x=0$ hay $5+2(\alpha+\beta)+\frac{\alpha^2}{3}+\frac{4\alpha\beta}{5}+\frac{\beta^2}{2}=0.$

Tương tự như bài trước, ta tìm được $\alpha=-15,\ \beta=10.$

Vậy $\int_0^1\left[f(x)-15x+10\sqrt{x}\right]^2\mathrm{d}x=0\longrightarrow f(x)=15x-10\sqrt{x},\ \forall x\in[0;1]\longrightarrow \int_0^1\left[f(x)\right]^3\mathrm{d}x=\frac{5}{6}.$ **Chọn A.**

Câu 78. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{16}.$ Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Lời giải. Hàm bình phương không như thông thường là $\left[f(x)\right]^2$ hoặc $\left[f'(x)\right]^2$.

Ở đây các hàm xuất hiện dưới dấu tích phân là $\left[\sqrt{x}f(x)\right]^2$, $x^2f(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[\sqrt{x}f(x)+???\right]^2=xf^2(x)+2???\sqrt{x}f(x)+(???)^2$. So sánh ta thấy được $???=\frac{x\sqrt{x}}{2}$.

Do đó giả thiết được viết lại $\int_0^1\left(\sqrt{x}f(x)-\frac{x\sqrt{x}}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{x\sqrt{x}}{2}\right)^2\mathrm{d}x-\frac{1}{16}=0.$

Suy ra $\sqrt{x}f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{2},\ \forall x\in[0;1]\longrightarrow f(x)=\frac{x}{2}\longrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$ **Chọn B.**

Câu 79. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;8]$ và thỏa mãn

$$\int_1^2\left[f\left(x^3\right)\right]^2\mathrm{d}x+2\int_1^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x-\frac{38}{15}.$$

Tích phân $\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{8\ln 2}{27}$. **B.** $\frac{\ln 2}{27}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải. Nhận thấy có một tích phân khác cận là $\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x$. Bằng cách đổi biến $x = t^3$ ta thu được tích phân $3\int_1^2 t^2 f(t^3)\mathrm{d}t = 3\int_1^2 x^2 f(x^3)\mathrm{d}x.$

Do đó giả thiết được viết lại $\int_1^2 \left[f(x^3)\right]^2\mathrm{d}x + 2\int_1^2 f(x^3)\mathrm{d}x = 2\int_1^2 x^2 f(x^3)\mathrm{d}x - \frac{38}{15}.$ (*)

Ở đây các hàm xuất hiện dưới dấu tích phân là $\left[f(x^3)\right]^2, f(x^3), x^2 f(x^3)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f(x^3)+\alpha x^2+\beta\right]^2$.

Tương tự như các bài trên ta tìm được $\alpha = -1,\ \beta = 1$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow \int_1^2 \left[f(x^3) - x^2 + 1\right]^2\mathrm{d}x = -\frac{38}{15} + \int_1^2 (1-x^2)^2\mathrm{d}x = 0$

$\longrightarrow f(x^3) = x^2 - 1,\ \forall x \in [1;2] \longrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1,\ \forall x \in [1;8] \longrightarrow \int_1^8 f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}.$ **Chọn D.**

Câu 80. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{7}{5}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 4.

Lời giải. Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2$, $x^2 f(x)$ không có mối liên hệ với nhau.

Dùng tích phân từng phần ta có $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x.$ Kết hợp với giả thiết $f(1)=0$, ta suy ra $\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x = -1.$

Bây giờ giả thiết được đưa về $\begin{cases} \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = 7 \\ \int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x = -1 \end{cases}$. Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $\left[f'(x)\right]^2$, $x^3 f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f'(x)+\alpha x^3\right]^2$.

Với mỗi số thực α ta có $\int_0^1 \left[f'(x)+\alpha x^3\right]^2\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x + 2\alpha\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x + \alpha^2\int_0^1 x^6\mathrm{d}x$

$$= 7 - 2\alpha + \frac{\alpha^2}{7} = \frac{1}{7}(\alpha-7)^2.$$

Ta cần tìm α sao cho $\int_0^1 \left[f'(x)+\alpha x^3\right]^2\mathrm{d}x = 0$ hay $\frac{1}{7}(\alpha-7)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 7.$

Vậy $\int_0^1 \left[f'(x)+7x^3\right]^2\mathrm{d}x = 0 \longrightarrow f'(x) = -7x^3, \forall x \in [0;1] \longrightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$

$\xrightarrow{f(1)=0} C = \frac{7}{4} \longrightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4} \longrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{7}{5}.$ **Chọn B.**

Cách 2. Dùng tích phân từng phần ta có $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x.$ Kết hợp với giả thiết $f(1)=0$, ta suy ra $\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x = -1.$

Theo Holder

$$(-1)^2 = \left(\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_0^1 x^6\mathrm{d}x.\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = \frac{x^7}{7}\Big|_0^1.7 = 1.$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $f'(x)=kx^3$, thay vào $\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x=-1$ ta được $k=-7$.

Suy ra $f'(x)=-7x^3$ (làm tiếp như trên)

Câu 81. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 x^5 f(x)\mathrm{d}x=\frac{11}{78}$ và $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}(f(x))=\frac{4}{13}$. Tính $f(2)$.

A. $f(2)=2$. **B.** $f(2)=\frac{251}{7}$. **C.** $f(2)=\frac{256}{7}$. **D.** $f(2)=\frac{261}{7}$.

Lời giải. Viết lại $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}(f(x))=\frac{4}{13}\Leftrightarrow\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{4}{13}$.

Dùng tích phân từng phần ta có $\int_0^1 x^5 f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^6}{6}f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{6}\int_0^1 x^6 f'(x)\mathrm{d}x$. Kết hợp với giả thiết $f(1)=1$, ta suy ra $\int_0^1 x^6 f'(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{13}$.

Bây giờ giả thiết được đưa về $\begin{cases}\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{4}{13}\\ \int_0^1 x^6 f'(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{13}\end{cases}$. Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $[f'(x)]^2$, $x^6 f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $[f'(x)+\alpha x^6]^2$. Tương tự như bài trên ta tìm được $\alpha=-2\longrightarrow f'(x)=2x^6\longrightarrow f(x)=\frac{2}{7}x^7+C\xrightarrow{f(1)=1}C=\frac{5}{7}$.

Vậy $f(x)=\frac{2}{7}x^7+\frac{5}{7}\longrightarrow f(2)=\frac{261}{7}$. **Chọn D.**

Cách 2. Theo Holder

$$\left(\frac{2}{13}\right)^2=\left(\int_0^1 x^6 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1 x^{12}dx.\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{13}.\frac{4}{13}=\frac{4}{169}.$$

Câu 82. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=2, f(0)=0$ và $\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x=4.$. Tích phân $\int_0^1[f^3(x)+2018x]\mathrm{d}x.$ bằng

A. 0. **B.** 1011. **C.** 2018. **D.** 2022.

Lời giải. Từ giả thiết $f(1)=2, f(0)=0$ suy ra $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_0^1=2$.

Hàm dưới dấu tích phân là $[f'(x)]^2$, $f'(x)$ nên sẽ liên kết với bình phương $[f'(x)+\alpha]^2$.

Ta tìm được $\alpha=-2\longrightarrow f'(x)=2\longrightarrow f(x)=2x+C\xrightarrow{f(0)=0}C=0$.

Vậy $f(x)=2x\longrightarrow\int_0^1[f^3(x)+2018x]\mathrm{d}x=1011$. **Chọn B.**

Cách 2. Theo Holder

$$2^2=\left(\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1\mathrm{d}x.\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x=1.4=4.$$

Câu 83. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$, thỏa mãn $\int_1^2(x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}$, $f(2)=0$ và $\int_1^2[f'(x)]^2\mathrm{d}x=7$.

Tích phân $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{7}{20}$. **B.** $\frac{7}{20}$. **C.** $-\frac{7}{5}$. **D.** $\frac{7}{5}$.

Lời giải. Chuyển thông tin $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x$ sang $f'(x)$ bằng cách tích phân từng phần, ta được $\int_1^2 (x-1)^3 f'(x)\mathrm{d}x = 1.$

Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2$, $(x-1)^3 f'(x)$ nên liên kết với $\left[f'(x)+\alpha(x-1)^3\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha = -7 \longrightarrow f'(x) = 7(x-1)^3 \longrightarrow f(x) = \dfrac{7}{4}(x-1)^4 + C \xrightarrow{f(2)=0} C = -\dfrac{7}{4}.$

Vậy $f(x) = \dfrac{7}{4}(x-1)^4 - \dfrac{7}{4} \longrightarrow \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{7}{5}.$ **Chọn C.**

Cách 2. Theo Holder

$$1^1 = \left[\int_1^2 (x-1)^3 f'(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_1^2 (x-1)^6 \mathrm{d}x \int_1^2 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{7}.7 = 1.$$

Câu 84. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \dfrac{9}{5}$ và $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{2}{5}.$ Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = \dfrac{1}{5}.$ **B.** $I = \dfrac{1}{4}.$ **C.** $I = \dfrac{3}{5}.$ **D.** $I = \dfrac{3}{4}.$

Lời giải. Chuyển thông tin $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$ sang $f'(x)$ bằng cách:

- Đặt $t = \sqrt{x} \longrightarrow \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{5}$ hay $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{5}.$
- Tích phân từng phần $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$, ta được $\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x = \dfrac{3}{5}.$

Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2$, $x^2 f'(x)$ nên liên kết với $\left[f'(x)+\alpha x^2\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha = -3 \longrightarrow f'(x) = 3x^2 \longrightarrow f(x) = x^3 + C \xrightarrow{f(1)=1} C = 0.$

Vậy $f(x) = x^3 \longrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}.$ **Chọn B.**

Cách 2. Theo Holder

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left[\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_0^1 x^4 \mathrm{d}x \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{5}.\frac{9}{5} = \frac{9}{25}.$$

Câu 85. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0)+f(1)=0$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$ và $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}.$ Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{\pi}.$ **B.** $\dfrac{2}{\pi}.$ **C.** $\pi.$ **D.** $\dfrac{3\pi}{2}.$

Lời giải. Hàm dưới dấu tích phân là $f^2(x)$ và $f'(x)\cos(\pi x)$, không thấy liên kết.

Do đó ta chuyển thông tin của $f'(x)\cos(\pi x)$ về $f(x)$ bằng cách tích phân từng phần của $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$ cùng với kết hợp $f(0)+f(1)=0$, ta được $\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}.$

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $f^2(x)$ và $f(x)\sin(\pi x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f(x)+\alpha\sin(\pi x)\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha = -1 \longrightarrow f(x) = \sin(\pi x) \longrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}.$ **Chọn B.**

Cách 2. Theo Holder

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.\int_0^1 \left[\sin(\pi x)\right]^2 dx = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.$$

Câu 86. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;\pi]$, thỏa mãn $\int\limits_0^\pi f'(x)\sin x\mathrm{d}x=-1$ và $\int\limits_0^\pi f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$. Tích phân $\int\limits_0^\pi xf(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{6}{\pi}$. **B.** $-\frac{4}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{4}{\pi}$.

Lời giải. Hàm dưới dấu tích phân là $f^2(x)$ và $f'(x)\sin x$, không thấy liên kết.

Do đó ta chuyển thông tin của $f'(x)\sin x$ về $f(x)$ bằng cách tích phân từng phần của $\int\limits_0^\pi f'(x)\sin x\mathrm{d}x=-1$, ta được $\int\limits_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=1$.

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $f^2(x)$ và $f(x)\cos x$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f(x)+\alpha\cos x\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha=-\frac{2}{\pi}\longrightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\cos x\longrightarrow\int\limits_0^\pi xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^\pi\frac{2x\cos x}{\pi}\mathrm{d}x=-\frac{4}{\pi}$. **Chọn B.**

Cách 2. Theo Holder

$$(1)^2=\left(\int\limits_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2\le\int\limits_0^\pi f^2(x)\mathrm{d}x\int\limits_0^\pi\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.\frac{\pi}{2}=1.$$

Câu 87. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa $f(1)=0$, $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}$ và $\int\limits_0^1\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{\pi}$. **B.** $\frac{2}{\pi}$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** π.

Lời giải. Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2$ và $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)f(x)$, không thấy liên kết.

Do đó ta chuyển thông tin của $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)f(x)$ về $f'(x)$ bằng cách tích phân từng phần của $\int\limits_0^1\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$ cùng với kết hợp $f(1)=0$, ta được $\int\limits_0^1\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}$.

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $\left[f'(x)\right]^2$ và $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f'(x)+\alpha\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha=\frac{\pi}{2}\longrightarrow f'(x)=-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\longrightarrow f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+C\xrightarrow{f(1)=0}C=0$.

Vậy $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\longrightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$. **Chọn B.**

Cách 2. Theo Holder

$$\left(-\frac{\pi}{4}\right)^2=\left(\int\limits_0^1\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int\limits_0^1\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x.\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\frac{\pi^2}{8}.$$

Câu 88. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int\limits_0^1 f'(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\pi$ và $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int\limits_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{6}{\pi}$. **B.** $-\frac{4}{\pi}$. **C.** $\frac{4}{\pi}$. **D.** $\frac{6}{\pi}$.

Lời giải. Chuyển thông tin của $f'(x)\sin(\pi x)$ về $f(x)$ bằng cách tích phân từng phần của $\int\limits_0^1 f'(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\pi$, ta được $\int\limits_0^1 f(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=-1$.

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $f^2(x)$ và $\cos(\pi x)f(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f(x)+\alpha\cos(\pi x)\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha=2\longrightarrow f(x)=-2\cos(\pi x)\longrightarrow\int\limits_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=-2\int\limits_0^1\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{4}{\pi}$. **Chọn B.**

Cách 2. Theo Holder

$$(-1)^2=\left[\int\limits_0^1 f(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x\right]^2\le\int\limits_0^1\cos^2(\pi x)\mathrm{d}x\int\limits_0^1\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.2.$$

Câu 89. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)\mathrm{d}x=3\pi$ và $\int\limits_0^{\pi}(\sin x-x)f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=6\pi$.

Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f''(x)\right]^3\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{2}{\pi}$. **B.** 0. **C.** 3π. **D.** 9π.

Lời giải. Tích phân từng phần của $\int\limits_0^{\pi}(\sin x-x)f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=6\pi$, kết hợp với $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ ta được

ta được $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}$.

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $f^2(x)$ và $\sin^2 xf(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f(x)+\alpha\sin^2 x\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha=-4\longrightarrow f(x)=4\sin^2 x\Rightarrow f'(x)=4\sin 2x\Rightarrow f''(x)=8\cos 2x$.

Vậy $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f''(x)\right]^3\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[8\cos 2x\right]^3\mathrm{d}x=0$. **Chọn B.**

Cách 2. Theo Holder

$$\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2=\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{16}.3\pi.$$

Câu 90. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(x+1)e^x f(x)\mathrm{d}x=\frac{e^2-1}{4}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{e-1}{2}$. **B.** $I=\frac{e^2}{4}$. **C.** $I=e-2$. **D.** $I=\frac{e}{2}$.

Lời giải. Tích phân từng phần của $\int\limits_0^1(x+1)e^x f(x)\mathrm{d}x$, kết hợp với $f(1)=0$ ta được

$$\int\limits_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{e^2-1}{4}.$$

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $\left[f'(x)\right]^2$ và $xe^x f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với $\left[f(x)+\alpha xe^x\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha=1\longrightarrow f'(x)=-xe^x\longrightarrow f(x)=-\int xe^x\mathrm{d}x=(1-x)e^x+C\xrightarrow{f(1)=0}C=0$.

Vậy $f(x)=(1-x)e^x\longrightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(1-x)e^x\mathrm{d}x=e-2$. **Chọn C.**

Cách 2. Theo Holder

$$\left(-\frac{e^2-1}{4}\right)^2=\left(\int\limits_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int\limits_0^1 x^2e^{2x}\mathrm{d}x.\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{e^2-1}{4}.\frac{e^2-1}{4}.$$

Câu 91. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0)=0, f(1)=1$ và $\int\limits_0^1\frac{\left[f'(x)\right]^2}{e^x}\mathrm{d}x=\frac{1}{e-1}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{e-2}{e-1}$. **B.** $\dfrac{e-1}{e-2}$. **D.** $\dfrac{1}{(e-1)(e-2)}$. **C.** 1.

Lời giải. Hàm dưới dấu tích phân là $\dfrac{\left[f'(x)\right]^2}{e^x}$ nên ta cần tìm một thông tin liên quan $f'(x)$.

Từ giả thiết $f(0)=0, f(1)=1$ ta nghĩ đến $\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_0^1 = f(1)-f(0)=1.$

Do đó ta có hàm dưới dấu tích phân là $\dfrac{\left[f'(x)\right]^2}{e^x}$ và $f'(x)$ nên sẽ liên kết với bình phương $\left[\dfrac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}+\alpha\sqrt{e^x}\right]^2$. Với mỗi số thực α ta có

$$\int\limits_0^1\left[\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}+\alpha\sqrt{e^x}\right]^2\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{\left[f'(x)\right]^2}{e^x}\mathrm{d}x+2\alpha\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x+\alpha^2\int\limits_0^1 e^x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{e-1}+2\alpha+\alpha^2(e-1)=\frac{1}{e-1}\left[(e-1)\alpha+1\right]^2.$$

Ta cần tìm α sao cho $\int\limits_0^1\left[\dfrac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}+\alpha\sqrt{e^x}\right]^2\mathrm{d}x=0$ hay $\dfrac{1}{e-1}\left[(e-1)\alpha+1\right]^2=0\Leftrightarrow\alpha=-\dfrac{1}{e-1}.$

Với $\alpha=-\dfrac{1}{e-1}$ thì $\int\limits_0^1\left[\dfrac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}-\dfrac{1}{e-1}\sqrt{e^x}\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}\equiv\dfrac{1}{e-1}\sqrt{e^x},\ \forall x\in[0;1].$

Suy ra $f'(x)=\dfrac{e^x}{e-1}\longrightarrow f(x)=\int\dfrac{e^x}{e-1}\mathrm{d}x=\dfrac{e^x}{e-1}+C\xrightarrow{f(0)=0,\,f(1)=1}C=-\dfrac{1}{e-1}.$

Vậy $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e-1}\longrightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{e-2}{e-1}$. **Chọn A.**

Cách 2. Theo Holder

$$1^2=\left[\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right]^2=\left[\int\limits_0^1\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}.\sqrt{e^x}\mathrm{d}x\right]^2\le\int\limits_0^1\frac{\left[f'(x)\right]^2}{e^x}\mathrm{d}x\int\limits_0^1 e^x\mathrm{d}x=\frac{1}{e-1}.(e-1)=1.$$

Câu 92. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0)=0, f(1)=1$ và $\int\limits_0^1\sqrt{1+x^2}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$.

Tích phân $\int\limits_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **D.** $\left(\sqrt{2}-1\right)\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Lời giải. Tương tự bài trước, ta có $\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_0^1=f(1)-f(0)=1.$

Do đó ta có hàm dưới dấu tích phân là $\sqrt{1+x^2}\left[f'(x)\right]^2$ và $f'(x)$ nên sẽ liên kết với bình phương $\left[\sqrt[4]{1+x^2}f'(x)+\dfrac{\alpha}{\sqrt[4]{1+x^2}}\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha=-\dfrac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}.\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\longrightarrow f(x)=\dfrac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}.\int\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C.$

Mà $f(0)=0, f(1)=1\Rightarrow C=0\longrightarrow f(x)=\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}.$

Vậy $\int\limits_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\int\limits_0^1\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\int\limits_0^1\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}.\dfrac{\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{2}\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. Chọn C.

Cách 2. Theo Holder

$$1^2=\left(\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2=\int_0^1 \sqrt[4]{1+x^2}f'(x).\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^2}}\mathrm{d}x\le\int_0^1\sqrt{1+x^2}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x.\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}.\ln\left(1+\sqrt{2}\right)=1.$$

Câu 93. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$, thỏa mãn $f(-1)=0$, $\int_{-1}^{1}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=112$ và $\int_{-1}^{1}x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{16}{3}$.

Tính tích phân $I=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{84}{5}$. **B.** $I=\frac{35}{2}$. **C.** $I=\frac{35}{4}$. **D.** $I=\frac{168}{5}$.

Lời giải. Như các bài trước, ta chuyển $\int_{-1}^{1}x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{16}{3}$ về thông tin của $f'(x)$ bằng cách tích phân từng phần. Đặt

$$\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^3}{3}\end{cases}.$$

Khi đó $\int_{-1}^{1}x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}f(x)\Big|_{-1}^{1}-\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}x^3f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}f(1)+\frac{1}{3}f(-1)-\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}x^3f'(x)\mathrm{d}x$. Tới đây ta bị vướng $f(1)$ vì giả thiết không cho. Do đó ta điều chỉnh lại như sau

$$\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^3}{3}+k\end{cases}\text{ với } k \text{ là hằng số.}$$

Khi đó $\int_{-1}^{1}x^2f(x)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}+k\right)f(x)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^3}{3}+k\right)f'(x)\mathrm{d}x$

$$=\left(\frac{1}{3}+k\right)f(1)-\underbrace{\left(-\frac{1}{3}+k\right)f(-1)}_{=0\text{ do }f(-1)=0}-\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^3}{3}+k\right)f'(x)\mathrm{d}x.$$

Ta chọn k sao cho $\frac{1}{3}+k=0\Leftrightarrow k=-\frac{1}{3}$.

Khi đó $\frac{16}{3}=\int_{-1}^{1}x^2f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\left(x^3-1\right)f'(x)\mathrm{d}x\longrightarrow\int_{-1}^{1}\left(x^3-1\right)f'(x)\mathrm{d}x=-16.$

Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2$, $\left(x^3-1\right)f'(x)$ nên ta liên kết với $\left[f'(x)+\alpha\left(x^3-1\right)\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha=7\longrightarrow f'(x)=-7\left(x^3-1\right)\Rightarrow f(x)=-7\int\left(x^3-1\right)\mathrm{d}x=-\frac{7}{4}x^4+7x+C$

$\xrightarrow{f(-1)=0}C=\frac{35}{4}\longrightarrow f(x)=-\frac{7}{4}x^4+7x+\frac{35}{4}$. Vậy $I=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{84}{5}$.

Cách 2. Theo Holder

$$(-16)^2=\left(\int_{-1}^{1}\left(x^3-1\right)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_{-1}^{1}\left(x^3-1\right)^2\mathrm{d}x.\int_{-1}^{1}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{16}{7}.112=256.$$

Câu 94. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{3}{2}-2\ln 2$ và $\int_0^1\frac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=2\ln 2-\frac{3}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1-\ln 2}{2}$. **B.** $\frac{1-2\ln 2}{2}$. **C.** $\frac{3-2\ln 2}{2}$. **D.** $\frac{3-4\ln 2}{2}$.

Lời giải. Như các bài trước, ta chuyển $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$ về thông tin của $f'(x)$ bằng cách tích phân từng phần. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = -\frac{1}{x+1} \end{cases}$.

Khi đó $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = -\left.\frac{f(x)}{x+1}\right|_0^1 + \int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1}\mathrm{d}x = -\frac{f(1)}{2} + \frac{f(0)}{1} + \int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1}\mathrm{d}x$. Tới đây ta bị vướng $f(0)$ vì giả thiết không cho. Do đó ta điều chỉnh lại như sau

$$\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = -\frac{1}{x+1} + k \end{cases} \text{ với } k \text{ là hằng số.}$$

Khi đó $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \left.\left(-\frac{1}{x+1}+k\right)f(x)\right|_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1}+k\right)f'(x)\mathrm{d}x =$

$$\overset{f(1)=0}{=} -(-1+k)f(0) - \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1}+k\right)f'(x)\mathrm{d}x.$$

Ta chọn k sao cho $-1+k=0 \Leftrightarrow k=1$.

Khi đó $2\ln 2 - \frac{3}{2} = \int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{x}{x+1}f'(x)\mathrm{d}x \longrightarrow \int_0^1 \frac{x}{x+1}f'(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2} - 2\ln 2$.

Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2$, $\frac{x}{x+1}f'(x)$ nên ta liên kết với $\left[f'(x) + \alpha\frac{x}{x+1}\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha = -1 \longrightarrow f'(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow f(x) = \int \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x = x - \ln|x+1| + C$

$\xrightarrow{f(1)=0} C = \ln 2 - 1 \longrightarrow f(x) = x - \ln(x+1) + \ln 2 - 1$. Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1-2\ln 2}{2}$. **Chọn B.**

Cách 2. Theo Holder

$$\left(\frac{3}{2} - 2\ln 2\right)^2 = \left[\int_0^1 \frac{x}{x+1}f'(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_0^1 \left(\frac{x}{x+1}\right)^2\mathrm{d}x \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = \left(\frac{3}{2} - 2\ln 2\right)\left(\frac{3}{2} - 2\ln 2\right).$$

Câu 95. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$, đồng biến trên $[1;2]$, thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_1^2 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = 2$ và $\int_1^2 f(x).f'(x)\mathrm{d}x = 1$. Tích phân $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải. Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2$, $f(x).f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f'(x) + \alpha f(x)\right]^2$. Nhưng khi khai triển thì vướng $\int_1^2 \left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$ nên hướng này không khả thi.

Ta có $1 = \int_1^2 f(x).f'(x)\mathrm{d}x = \left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_1^2 = \frac{f^2(2) - f^2(1)}{2} = \frac{f^2(2) - 0}{2} \longrightarrow f(2) = \sqrt{2}$ (do đồng biến trên $[1;2]$ nên $f(2) > f(1) = 0$)

Từ $f(1)=0$ và $f(2)=\sqrt{2}$ ta nghĩ đến $\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x = \left.f(x)\right|_1^2 = f(2) - f(1) = \sqrt{2} - 0 = \sqrt{2}$.

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $\left[f'(x)\right]^2$, $f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với $\left[f'(x) + \alpha\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha = -\sqrt{2} \longrightarrow f'(x) = \sqrt{2} \longrightarrow f(x) = \sqrt{2}x + C \xrightarrow{f(1)=0} C = -\sqrt{2}$.

Vậy $f(x) = \sqrt{2}x - \sqrt{2} \longrightarrow \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn A.**

Câu 96. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=1$ và $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2 f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}$. Giá trị của $f^2(\sqrt{2})$ bằng

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{3(1-\sqrt{2})}{2}$. **D.** $-\frac{3(1-\sqrt{2})}{2}$.

Lời giải. Hàm dưới dấu tích phân là $[f'(x)]^2 f^2(x)$ và $f^2(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $[f'(x)f(x)+\alpha f(x)]^2$. Nhưng khi khai triển thì vướng $\int\limits_0^1 f^2(x)f'(x)\mathrm{d}x$ nên hướng này không khả thi.

Tích phân từng phần $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=1$ kết hợp với $f(1)=0$, ta được $\int\limits_0^1 xf(x)f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}$.

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $[f'(x)]^2 f^2(x)$ và $xf(x)f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $[f(x)f'(x)+\alpha x]^2$.

Ta tìm được $\alpha=\frac{3}{2}\longrightarrow f(x)f'(x)=-\frac{3}{2}x\Rightarrow \int f(x)f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{3}{2}\int x\mathrm{d}x\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2}=-\frac{3}{4}x^2+C$

$\xrightarrow{f(1)=0} C=\frac{3}{4}\longrightarrow f^2(x)=\frac{3}{2}(1-x^2)\longrightarrow f^2(\sqrt{2})=-\frac{3}{2}$. **Chọn A.**

Câu 97. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$, thỏa mãn $f(2)=1$, $\int\limits_0^2 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{8}{15}$ và $\int\limits_0^2 [f'(x)]^4\mathrm{d}x=\frac{32}{5}$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải. Hàm dưới dấu tích phân $[f'(x)]^4$ và $x^2 f(x)$. Lời khuyên là đừng có cố liên kết với bình phương nào, vì có tìm cũng không ra.

Tích phân từng phần $\int\limits_0^2 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{8}{15}$ kết hợp với $f(2)=1$, ta được $\int\limits_0^2 x^3 f'(x)\mathrm{d}x=\frac{32}{5}$.

Áp dụng Holder 2 lần ta được

$$\left(\frac{32}{5}\right)^4=\left(\int\limits_0^2 x^3 f'(x)\mathrm{d}x\right)^4=\left(\int\limits_0^2 x^2.xf'(x)\mathrm{d}x\right)^4\le\left(\int\limits_0^2 x^4\mathrm{d}x\right)^2\left(\int\limits_0^2 x^2[f'(x)]^2\mathrm{d}x\right)^2$$

$$\le\left(\int\limits_0^2 x^4\mathrm{d}x\right)^2\times\left(\int\limits_0^2 x^4\mathrm{d}x.\int\limits_0^2 [f'(x)]^4\mathrm{d}x\right)$$

$$=\left(\int\limits_0^2 x^4\mathrm{d}x\right)^3\times\int\limits_0^2 [f'(x)]^4\mathrm{d}x=\frac{1048576}{625}=\left(\frac{32}{5}\right)^4.$$

Dấu "=" xảy ra, tức là $xf'(x)=kx^2\Rightarrow f'(x)=kx$ thay vào $\int\limits_0^2 [f'(x)]^4\mathrm{d}x=\frac{32}{5}$ tìm được $k=1$

$\longrightarrow f'(x)=x\Rightarrow f(x)=\int x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+C\xrightarrow{f(2)=1}C=-1.$

Vậy $f(x)=\frac{x^2}{2}-1\longrightarrow \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}$. **Chọn B.**

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$[f'(x)]^4+x^4+x^4+x^4\ge 4x^3 f'(x).$$

Do vậy $\int\limits_0^2 [f'(x)]^4\mathrm{d}x+3\int\limits_0^2 x^4\mathrm{d}x\ge 4\int\limits_0^2 x^3 f'(x)\mathrm{d}x$. Mà giá trị của hai vế bằng nhau, có nghĩa là dấu "=" xảy ra nên $f'(x)=x$. (Làm tiếp như trên).

Vấn đề 12. Kỹ thuật đánh giá AM-GM

Câu 98. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=ef(0)$ và $\int\limits_0^1 \frac{dx}{f^2(x)}+\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,dx \le 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $f(1)=\sqrt{\frac{2e}{e-1}}$. **B.** $f(1)=\frac{2(e-2)}{e-1}$. **C.** $f(1)=\sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}$. **D.** $f(1)=\sqrt{\frac{2(e-2)}{e-1}}$.

Lời giải. Ta có $\int\limits_0^1 \frac{dx}{f^2(x)}+\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,dx=\int\limits_0^1\left[\frac{1}{f^2(x)}+[f'(x)]^2\right]dx \overset{\text{AM-GM}}{\ge} 2\int\limits_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx$

$=2\ln|f(x)|\Big|_0^1=2\ln|f(1)|-2\ln|f(0)|=2\ln\left|\frac{f(1)}{f(0)}\right|=2\ln e=2.$

Mà $\int\limits_0^1 \frac{dx}{f^2(x)}+\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,dx \le 2$ nên dấu "$=$" xảy ra, tức là $f'(x)=\frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)f'(x)=1$

$\longrightarrow \int f(x)f'(x)dx=\int xdx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2}=x+C \longrightarrow f(x)=\sqrt{2x+2C}.$

Theo giả thiết $f(1)=ef(0)$ nên ta có $\sqrt{2+2C}=e\sqrt{2C} \Leftrightarrow 2+2C=e^2 2C \Leftrightarrow C=\frac{1}{e^2-1}$

$\longrightarrow f(x)=\sqrt{2x+\frac{2}{e^2-1}} \Rightarrow f(1)=\sqrt{2+\frac{2}{e^2-1}}=\sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}$. **Chọn C.**

Câu 99. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0;1]$, có đạo hàm dương và liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0)=1$ và $\int\limits_0^1\left[f^3(x)+4[f'(x)]^3\right]dx \le 3\int\limits_0^1 f'(x)f^2(x)dx$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)dx$.

A. $I=2\left(\sqrt{e}-1\right)$. **B.** $I=2\left(e^2-1\right)$. **C.** $I=\frac{\sqrt{e}-1}{2}$. **D.** $I=\frac{e^2-1}{2}$.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số dương ta có

$$f^3(x)+4[f'(x)]^3=4[f'(x)]^3+\frac{f^3(x)}{2}+\frac{f^3(x)}{2}\ge 3\sqrt[3]{4[f'(x)]^3.\frac{f^3(x)}{2}.\frac{f^3(x)}{2}}=3f'(x)f^2(x).$$

Suy ra $\int\limits_0^1\left[f^3(x)+4[f'(x)]^3\right]dx \ge 3\int\limits_0^1 f'(x)f^2(x)dx$.

Mà $\int\limits_0^1\left[f^3(x)+4[f'(x)]^3\right]dx \le 3\int\limits_0^1 f'(x)f^2(x)dx$ nên dấu "$=$" xảy ra, tức là

$$4[f'(x)]^3=\frac{f^3(x)}{2}=\frac{f^3(x)}{2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}f(x)$$

$\longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\Rightarrow \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\frac{1}{2}\int dx \Rightarrow \ln|f(x)|=\frac{1}{2}x+C \longrightarrow f(x)=e^{\frac{1}{2}x+C}$.

Theo giả thiết $f(0)=1\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=e^{\frac{1}{2}x} \longrightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx=2\left(\sqrt{e}-1\right)$. **Chọn A.**

Câu 100. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0;1]$, có đạo hàm dương liên và tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int\limits_0^1\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx \ge 1$ và $f(0)=1$, $f(1)=e^2$. Tính giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

A. $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$. **B.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=4$. **C.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$. **D.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=e$.

Lời giải. Hàm dưới dấu tích phân là $\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}=\sqrt{x}.\sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}}$, $\forall x\in[0;1]$. Điều này làm ta liên tưởng đến đạo hàm đúng $\frac{f'(x)}{f(x)}$, muốn vậy ta phải đánh giá theo AM – GM như sau:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+mx\ge 2\sqrt{m}.\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} \quad \text{với } m\ge 0 \text{ và } x\in[0;1].$$

Do đó ta cần tìm tham số $m \geq 0$ sao cho

$$\int_0^1 \left[\frac{f'(x)}{f(x)} + mx\right] \mathrm{d}x \geq 2\sqrt{m}.\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} \mathrm{d}x$$

hay

$$\ln\left|f(x)\right|\Big|_0^1 + m\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 \geq 2\sqrt{m}.1 \Leftrightarrow \ln\left|f(1)\right| - \ln\left|f(0)\right| + \frac{m}{2} \geq 2\sqrt{m} \Leftrightarrow 2 - 0 + \frac{m}{2} \geq 2\sqrt{m}.$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $2 - 0 + \frac{m}{2} = 2\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 4.$

Với $m = 4$ thì đẳng thức xảy ra nên $\frac{f'(x)}{f(x)} = 4x$

$\longrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \int 4x\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln\left|f(x)\right| = 2x^2 + C \Rightarrow f(x) = e^{2x^2+C}.$

Theo giả thiết $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = e^2 \end{cases} \Rightarrow C = 0 \longrightarrow f(x) = e^{2x^2} \longrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}.$ **Chọn C.**

Cách 2. Theo Holder

$$1^2 \leq \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} \mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{x}.\sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}} \mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_0^1 x\mathrm{d}x.\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.\ln\frac{f(1)}{f(0)} = 1.$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} = kx,$ thay vào $\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} \mathrm{d}x = 1$ ta được $k = 4.$

Suy ra $\frac{f'(x)}{f(x)} = 4x.$ (làm tiếp như trên)

Câu 101. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1],$ thỏa mãn $\int_0^1 \left[f(x)f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x \leq 1$ và $f(0) = 1,$ $f(1) = \sqrt{3}.$ Tính giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right).$

A. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}.$ **B.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3.$ **C.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}.$ **D.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = e.$

Lời giải. Nhận thấy bài này ngược dấu bất đẳng thức với bài trên.

Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f(x)f'(x)\right]^2$. Điều này làm ta liên tưởng đến đạo hàm đúng $f(x)f'(x)$, muốn vậy ta phải đánh giá theo $\mathrm{AM} - \mathrm{GM}$ như sau:

$$\left[f(x)f'(x)\right]^2 + m \geq 2\sqrt{m}.f(x)f'(x) \text{ với } m \geq 0.$$

Do đó ta cần tìm tham số $m \geq 0$ sao cho

$$\int_0^1 \left(\left[f(x)f'(x)\right]^2 + m\right) \mathrm{d}x \geq 2\sqrt{m}\int_0^1 f(x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

hay

$$1 + m \geq 2\sqrt{m}.\frac{f^2(x)}{2}\Big|_0^1 \Leftrightarrow 1 + m \geq 2\sqrt{m}.$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $1 + m = 2\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 1.$

Với $m = 1$ thì đẳng thức xảy ra nên $\left[f(x)f'(x)\right]^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)f'(x) = 1 \\ f(x)f'(x) = -1 \end{array}\right.$.

- $f(x)f'(x) = -1 \longrightarrow \int_0^1 f(x)f'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 \mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2}\Big|_0^1 = -x\Big|_0^1 \Leftrightarrow 1 = -1.$ (vô lý)
- $f(x)f'(x) = 1 \longrightarrow \int f(x)f'(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = x + C \longrightarrow f(x) = \sqrt{2x + 2C}.$

Theo giả thiết $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \longrightarrow f(x) = \sqrt{2x + 1} \longrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}.$ **Chọn A.**

Cách 2. Ta có $\int\limits_0^1 f(x)f'(x)\mathrm{d}x=\left.\dfrac{f^2(x)}{2}\right|_0^1=\dfrac{1}{2}\left[f^2(1)-f^2(0)\right]=1.$

Theo Holder

$$1^2=\left(\int\limits_0^1 1.f(x)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int\limits_0^1 1^2\mathrm{d}x.\int\limits_0^1\left[f(x)f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\le 1.1=1.$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $f'(x)f(x)=k,$ thay vào $\int\limits_0^1 f(x)f'(x)\mathrm{d}x=1$ ta được $k=1.$ Suy ra $f'(x)f(x)=1.$ (làm tiếp như trên)

Câu 102. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;2],$ thỏa mãn $\int\limits_1^2\dfrac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}\mathrm{d}x\le 24$ và $f(1)=1,\ f(2)=16.$ Tính giá trị của $f\left(\sqrt{2}\right).$

A. $f\left(\sqrt{2}\right)=1.$ **B.** $f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}.$ **C.** $f\left(\sqrt{2}\right)=2.$ **D.** $f\left(\sqrt{2}\right)=4.$

Lời giải. Hàm dưới dấu tích phân là $\dfrac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}=\dfrac{1}{x}.\dfrac{\left[f'(x)\right]^2}{f(x)}.$ Điều này làm ta liên tưởng đến đạo hàm đúng $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$, muốn vậy ta phải đánh giá theo $\mathrm{AM-GM}$ như sau:

$$\frac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}+mx\ge 2\sqrt{m}\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\text{ với } m\ge 0 \text{ và } x\in[1;2].$$

Do đó ta cần tìm tham số $m\ge 0$ sao cho

$$\int\limits_1^2\left(\frac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}+mx\right)\mathrm{d}x\ge 2\sqrt{m}\int\limits_1^2\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x$$

hay

$$24+\frac{2m}{3}\ge 4\sqrt{m}\left.\sqrt{f(x)}\right|_1^2\Leftrightarrow 24+\frac{2m}{3}\ge 4\sqrt{m}\left[\sqrt{f(2)}-\sqrt{f(1)}\right]\Leftrightarrow 24+\frac{2m}{3}\ge 12\sqrt{m}\Leftrightarrow m=16.$$

Để dấu $"="$ xảy ra thì ta cần có $24+\dfrac{2m}{3}=12\sqrt{m}\Leftrightarrow m=16.$

Với $m=16$ thì đẳng thức xảy ra nên $\dfrac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}=16x\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=2x$

$\longrightarrow\displaystyle\int\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{d}x\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=x^2+C\longrightarrow f(x)=\left(x^2+C\right)^2.$

Theo giả thiết $\begin{cases}f(1)=1\\f(2)=16\end{cases}\Rightarrow C=0\longrightarrow f(x)=x^4\longrightarrow f\left(\sqrt{2}\right)=4.$ **Chọn D.**

Cách 2. Ta có $\int\limits_1^2\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x=2.\int\limits_1^2\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x=2\left.\sqrt{f(x)}\right|_1^2=2\left[\sqrt{f(2)}-\sqrt{f(1)}\right]=6.$

Theo Holder

$$6^2=\left(\int\limits_1^2\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int\limits_1^1\sqrt{x}.\frac{f'(x)}{\sqrt{xf(x)}}\mathrm{d}x\right)^2\le\int\limits_1^2 x\mathrm{d}x.\int\limits_1^2\frac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}\mathrm{d}x\le\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2.24=36.$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{xf(x)}}=k\sqrt{x}\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=kx,$ thay vào $\int\limits_1^2\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x=6$ ta được $k=4.$ Suy ra $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=4x.$ (làm tiếp như trên)

Vấn đề 13. Tìm GTLN-GTNN của tích phân

Câu 103. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R},$ có đạo hàm cấp hai thỏa mãn $x.f''(x)\ge e^x+x$ và $f'(2)=2e,\ f(0)=e^2.$ Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $f(2)\le 4e-1.$ **B.** $f(2)\le 2e+e^2.$ **C.** $f(2)\le e^2-2e.$ **D.** $f(2)>12.$

Lời giải. Từ giả thiết $x.f''(x)\ge e^x+x$ ta có $\int_0^2 x.f''(x)\mathrm{d}x\ge\int_0^2\left(e^x+x\right)\mathrm{d}x.\quad(1)$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f''(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f'(x)\end{cases}.$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow x.f'(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f'(x)\mathrm{d}x\ge\left(e^x+\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2$

$\Leftrightarrow x.f'(x)\Big|_0^2-f(x)\Big|_0^2\ge\left(e^x+\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2$

$\Leftrightarrow\left[2.f'(2)-0.f'(0)\right]-\left[f(2)-f(0)\right]\ge e^2+2-1$

$\Leftrightarrow f(2)\le 4e-1$ (do $f'(2)=2e,\ \ f(0)=e^2$). **Chọn A**

Câu 104. Cho hàm số $f(x)$ dương và liên tục trên $[1;3]$, thỏa $\max\limits_{[1;3]}f(x)=2,\quad \min\limits_{[1;3]}f(x)=\dfrac{1}{2}$ và biểu thức $S=\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x.\int\limits_1^3\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$ đạt giá trị lớn nhất, khi đó hãy tính $I=\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x.$

A. $\dfrac{3}{5}.$ **B.** $\dfrac{7}{5}.$ **C.** $\dfrac{7}{2}.$ **D.** $\dfrac{5}{2}.$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $\dfrac{1}{2}\le f(x)\le 2$, suy ra $f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\le\dfrac{5}{2}.$

Suy ra $\int\limits_1^3\left[f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\le\int\limits_1^3\dfrac{5}{2}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_1^3\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\le 5\Leftrightarrow\int\limits_1^3\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\le 5-\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x.$

Khi đó $S=\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x.\int\limits_1^3\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\le\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x.\left(5-\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x\right)\le\dfrac{25}{4}.$

(dạng $t(5-t)=-t^2+5t=-\left(t-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}\le\dfrac{25}{4}$)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{5}{2}.$ **Chọn D.**

Câu 105. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x)+f'(x)\le 1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Giá trị lớn nhất của $f(1)$ bằng

A. $e-1.$ **B.** $\dfrac{e-1}{e}.$ **C.** $\dfrac{e}{e-1}.$ **D.** $e.$

Lời giải. Từ giả thiết $f(x)+f'(x)\le 1$, nhân thêm hai vế cho e^x để thu được đạo hàm đúng là $e^xf(x)+e^xf'(x)\le e^x,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ \left[e^xf(x)\right]'\le e^x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Suy ra $\int\limits_0^1\left[e^xf(x)\right]'\mathrm{d}x\le\int\limits_0^1 e^x\mathrm{d}x\Leftrightarrow\left[e^xf(x)\right]\Big|_0^1\le e-1\Leftrightarrow\left[ef(1)-1.f(0)\right]\Big|_0^1\le e-1$

$\xrightarrow{f(0)=0}f(1)\le\dfrac{e-1}{e}.$ **Chọn B.**

Câu 106. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=2018f(0)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\int\limits_0^1\dfrac{1}{\left[f(x)\right]^2}\mathrm{d}x+\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$ bằng

A. $\ln 2018.$ **B.** $2\ln 2018.$ **C.** $m=2e.$ **D.** $m=2018e.$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được

$$M=\int\limits_0^1\frac{1}{\left[f(x)\right]^2}\mathrm{d}x+\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\ge 2\int\limits_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=2\ln f(x)\Big|_0^1=2\ln\frac{f(1)}{f(0)}=2\ln 2018.$$ **Chọn B.**

Câu 107. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và $\int\limits_0^1(1-x)^2f'(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}$. Giá trị nhỏ nhật của biểu thức $\int\limits_0^1\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x-f(0)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải. Tích phân từng phần $\int_0^1 (1-x)^2 f'(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}$, ta được $f(0)-\dfrac{1}{3} = 2\int_0^1 (1-x)f(x)\mathrm{d}x$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được

$$2\int_0^1 (1-x)f(x)\mathrm{d}x \le \int_0^1 (1-x)^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

Từ đó suy ra $\int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x \ge 2\int_0^1 (1-x)f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 (1-x)^2\,\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x \ge f(0) - \frac{1}{3} + \left.\frac{(1-x)^3}{3}\right|_0^1.$$

Vậy $\int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x - f(0) \ge -\dfrac{2}{3}$. **Chọn D.**

Câu 108. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;\,1]$ thỏa mãn $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 0$ và $\max\limits_{[0;\,1]}|f(x)| = 1$. Tích phân $\int_0^1 e^x f(x)\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(-\infty; -\dfrac{5}{4}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{3}{2}; e-1\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{5}{4}; \dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $(e-1; +\infty)$.

Lời giải. Với mỗi số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ ta có $\left|\int_0^1 e^x f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^1 e^x f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \alpha x f(x)\mathrm{d}x\right|$

$$= \left|\int_0^1 f(x)\left(e^x - \alpha x\right)\mathrm{d}x\right| \le \int_0^1 |f(x)|.\left|e^x - \alpha x\right|\mathrm{d}x \le \int_0^1 \left|e^x - \alpha x\right|\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\left|\int_0^1 e^x f(x)\mathrm{d}x\right| \le \min\limits_{\alpha\in\mathbb{R}} \int_0^1 \left|e^x - \alpha x\right|\mathrm{d}x \le \min\limits_{\alpha\in[0;1]} \int_0^1 \left|e^x - \alpha x\right|\mathrm{d}x = \min\limits_{\alpha\in[0;1]} \left\{e - 1 - \dfrac{\alpha}{2}\right\} = e - \dfrac{3}{2}$. **Chọn C.**

Câu 109. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên $[0;1]$. Đặt $g(x) = 1 + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Biết $g(x) \le \sqrt{f(x)}$ với mọi $x \in [0;1]$, tích phân $\int_0^1 \dfrac{1}{g(x)}\mathrm{d}x$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 1.

Lời giải. Từ giả thiết $g(x) = 1 + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, ta có $\begin{cases} g(0) = 1 \\ g'(x) = f(x) \end{cases}$ và $g(x) > 0,\ \forall x \in [0;1]$.

Theo giả thiết $g(x) \le \sqrt{f(x)} \longrightarrow g(x) \le \sqrt{g'(x)} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{g'(x)}}{g(x)} \ge 1 \Leftrightarrow \dfrac{g'(x)}{g^2(x)} \ge 1$.

Suy ra $\int_0^t \dfrac{g'(x)}{g^2(x)}\mathrm{d}x \ge \int_0^t 1\mathrm{d}x,\ \forall t \in [0;1] \longleftrightarrow -\left.\dfrac{1}{g(x)}\right|_0^t \ge \left.x\right|_0^t \Leftrightarrow -\dfrac{1}{g(t)} + \dfrac{1}{g(0)} \ge t \Leftrightarrow \dfrac{1}{g(t)} \le 1 - t$.

Do đó $\int_0^1 \dfrac{1}{g(x)}\mathrm{d}x \le \int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}$. **Chọn B.**

Câu 110. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $f^2(x) \le 1 + 3\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = g(x)$ với mọi $x \in [0;1]$, tích phân $\int_0^1 \sqrt{g(x)}\mathrm{d}x$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{7}{4}$. **C.** $\dfrac{9}{5}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải. Từ giả thiết $g(x) = 1 + 3\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, ta có $\begin{cases} g(0) = 1 \\ g'(x) = 3f(x) \end{cases}$ và $g(x) > 0,\ \forall x \in [0;1]$.

Theo giả thiết $g(x)\ge f^2(x)\longrightarrow g(x)\ge \frac{[g'(x)]^2}{9}\Leftrightarrow \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}\le \frac{3}{2}.$

Suy ra $\int_0^t \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}\mathrm{d}x\le \int_0^t \frac{3}{2}\mathrm{d}x,\ \forall t\in[0;1]\longleftrightarrow \sqrt{g(x)}\Big|_0^t\le \frac{3}{2}x\Big|_0^t\Leftrightarrow \sqrt{g(t)}-\sqrt{g(0)}\le \frac{3}{2}t\Leftrightarrow \sqrt{g(t)}\le \frac{3}{2}t+1.$

Do đó $\int_0^1 \sqrt{g(x)}\mathrm{d}x\le \int_0^1\left(\frac{3}{2}x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{4}.$ **Chọn B.**

Câu 111. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $f(x)\le 2018+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ với mọi $x\in[0;1]$. Biết giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ có dạng ae^2+b với $a,\ b\in\mathbb{Z}$. Tính $a+b$.

A. 0. **B.** 1009. **C.** 2018. **D.** 2020.

Lời giải. Đặt $g(x)=2018+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, ta có $\begin{cases} g(0)=2018\\ g'(x)=2f(x)\end{cases}$ và $g(x)>0,\ \forall x\in[0;1]$.

Theo giả thiết $g(x)\ge f(x)\longrightarrow g(x)\ge \frac{g'(x)}{2}\Leftrightarrow \frac{g'(x)}{g(x)}\le 2.$

Suy ra $\int_0^t \frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x\le \int_0^t 2\mathrm{d}x,\ \forall t\in[0;1]\longleftrightarrow \ln|g(x)|\Big|_0^t\le 2x\Big|_0^t$

$\Leftrightarrow \ln g(t)-\ln g(0)\le 2t\Leftrightarrow \ln g(t)\le 2t+\ln 2018\Leftrightarrow g(t)\le 2018.e^{2t}$

Do đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\le \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\le 2018\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x=1009e^{2x}\Big|_0^1=1009e^2-1009.$ **Chọn A.**

Câu 112. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$. Đặt $g(x)=1+\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$. Biết $g(x)\ge 2xf(x^2)$ với mọi $x\in[0;1]$, tích phân $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$ có giá trị lớn nhất bằng

A. 1. **B.** $e-1$. **C.** 2. **D.** $e+1$.

Lời giải. Từ giả thiết $g(x)=1+\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$, ta có $\begin{cases} g(0)=1\\ g'(x)=2xf(x^2)\end{cases}$ và $g(x)>0,\ \forall x\in[0;1]$.

Theo giả thiết $g(x)\ge 2xf(x^2)\longrightarrow g(x)\ge g'(x)\Leftrightarrow \frac{g'(x)}{g(x)}\le 1.$

Suy ra $\int_0^t \frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x\le \int_0^t 1\mathrm{d}x,\ \forall t\in[0;1]\longleftrightarrow \ln g(x)\Big|_0^t\le x\Big|_0^t$

$$\Leftrightarrow \ln g(t)-\ln g(0)\le t\Leftrightarrow \ln g(t)\le t\Leftrightarrow g(t)\le e^t.$$

Do đó $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\le \int_0^1 e^x\mathrm{d}x=e-1.$ **Chọn B.**

Nhận xét. Gọi $F(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0;x^2]$.

Khi đó $g(x)=1+F(t)\Big|_0^{x^2}=1+F(x^2)-F(0)\longrightarrow g'(x)=\left[F(x^2)\right]'=(x^2)'F'(x^2)=2xf(x^2).$

Câu 113. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa $f'(x)\ge f(x)>0,\ \forall x\in[0;1]$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $f(0).\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{e-1}{e}$. **C.** $\frac{e+1}{e}$. **D.** $e-1$.

Lời giải. Từ giả thiết $f'(x)\ge f(x)>0,\ \forall x\in[0;1]$ ta có $\frac{f'(x)}{f(x)}\ge 1,\ \forall x\in[0;1]$.

Suy ra $\int_0^t \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\ge \int_0^t 1\mathrm{d}x,\ \forall t\in[0;1]\longleftrightarrow \ln f(x)\Big|_0^t\ge x\Big|_0^t\Leftrightarrow \ln f(t)-\ln f(0)\ge t\Leftrightarrow f(t)\ge f(0)e^t.$

Do đó $f(0).\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \le \int_0^1 \frac{1}{e^x}dx = \frac{e-1}{e}$. **Chọn B.**

Câu 114. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;\pi]$, thỏa mãn $\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi \cos x f(x)dx = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^\pi f^2(x)dx$ bằng

A. $\frac{2}{\pi}$. **B.** $\frac{3}{\pi}$. **C.** $\frac{4}{\pi}$. **D.** $\frac{3}{2\pi}$.

Lời giải. Theo Holder

$$(1)^2 = \left[\int_0^\pi \cos x f(x)dx\right]^2 \le \int_0^\pi \cos^2 x dx.\int_0^\pi f^2(x)dx = \frac{\pi}{2}.\int_0^\pi f^2(x)dx.$$

Suy ra $\int_0^\pi f^2(x)dx \ge \frac{2}{\pi}$. (Đến đây bạn đọc có thể chọn A)

Dấu "=" xảy ra khi $f(x) = k\cos x$ thay vào $\int_0^\pi f(x)dx = 1$ ta được

$$1 = \int_0^\pi f(x)dx = k\int_0^\pi \cos x dx = k.\sin x\Big|_0^\pi = 0.$$

Điều này hoàn toàn vô lý.

Lời giải đúng. Ta có $\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi \cos x f(x)dx = 1 \longrightarrow \begin{cases} a = \int_0^\pi a\cos x f(x)dx \\ b = \int_0^\pi bf(x)dx \end{cases}$ với $\begin{cases} a,\ b \in \mathbb{R} \\ a^2 + b^2 > 0 \end{cases}$.

Theo Holder

$$(a+b)^2 = \left[\int_0^\pi (a\cos x + b)f(x)dx\right]^2 \le \int_0^\pi (a\cos x + b)^2 dx \int_0^\pi f^2(x)dx.$$

Lại có

$$\int_0^\pi (a\cos x + b)^2 dx = \frac{1}{2}\pi\left(a^2 + 2b^2\right).$$

Từ đó suy ra $\int_0^\pi f^2(x)dx \ge \frac{2(a+b)^2}{\pi\left(a^2+2b^2\right)}$ với mọi $a,\ b \in \mathbb{R}$ và $a^2 + b^2 > 0$.

Do đó $\int_0^\pi f^2(x)dx \ge \frac{2}{\pi}.\max\left\{\frac{(a+b)^2}{a^2+2b^2}\right\} = \frac{3}{\pi}$. **Chọn B.**

Nhận xét: ● Ta nhân thêm $a,\ b$ vào giả thiết được gọi là phương pháp biến thiên hằng số.

● Cách tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{(a+b)^2}{a^2+2b^2}$ ta làm như sau:

Nếu $b = 0 \longrightarrow P = 1$. (chính là đáp án sai mà mình đã làm ở trên)

Nếu $b \ne 0 \longrightarrow P = \frac{(a+b)^2}{a^2+2b^2} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2\frac{a}{b} + 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2} \overset{t=\frac{a}{b}}{=} \frac{t^2+2t+1}{t^2+2}$. Tới đây ta khảo sát hàm số hoặc dùng MODE 7 dò tìm. Kết quả thu được GTLN của P bằng $\frac{3}{2}$ khi $t = 2 \longrightarrow \frac{a}{b} = 2 \Leftrightarrow a = 2b$.

Vậy dấu "=" để bài toán xảy ra khi $\begin{cases} a = 2b \\ f(x) = b(2\cos x + 1) \end{cases}$ thay ngược lại điều kiện, ta được

$$\int_0^\pi b(2\cos x + 1)dx = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{\pi} \longrightarrow f(x) = \frac{2\cos x + 1}{\pi}.$$

Lúc này $\int_0^\pi f^2(x)dx = \int_0^\pi \left(\frac{2\cos x + 1}{\pi}\right) dx = \frac{3}{\pi}$.

Cách khác. Đưa về bình phương

Hàm dưới dấu tích phân là $f^2(x), f(x),\ \cos x f(x)$ nên ta liên kết với $\left[f(x)+\alpha\cos x+\beta\right]^2$.

Với mỗi số thực $\alpha,\ \beta$ ta có

$$\int_0^\pi \left[f(x)+\alpha\cos x+\beta\right]^2 = \int_0^\pi f^2(x)\mathrm{d}x + 2\int_0^\pi (\alpha\cos x+\beta)f(x)\mathrm{d}x + \int_0^\pi (\alpha\cos x+\beta)^2\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\pi f^2(x)\mathrm{d}x + 2(\alpha+\beta) + \frac{\pi}{2}\alpha^2 + \pi\beta^2.$$

Ta cần tìm $\alpha,\ \beta$ sao cho $2(\alpha+\beta)+\frac{\pi}{2}\alpha^2+\pi\beta^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có

$$2(\alpha+\beta)+\frac{\pi}{2}\alpha^2+\pi\beta^2 = \frac{\pi}{2}\left(\alpha+\frac{2}{\pi}\right)^2 + \pi\left(\beta+\frac{1}{\pi}\right)^2 - \frac{3}{\pi} \ge -\frac{3}{\pi}.$$

Vậy với $\alpha=-\frac{2}{\pi};\ \beta=-\frac{1}{\pi}$ thì ta có

$$\int_0^\pi \left[f(x)-\frac{2}{\pi}\cos x-\frac{1}{\pi}\right]^2 = \int_0^\pi f^2(x)\mathrm{d}x - \frac{3}{\pi}.$$

Suy ra $\int_0^\pi f^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \left[f(x)-\frac{2}{\pi}\cos x-\frac{1}{\pi}\right]^2 + \frac{3}{\pi} \ge \frac{3}{\pi}$. Dấu "=" xảy ra khi $f(x)=\frac{2\cos x+1}{\pi}$.

Câu 115. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;\pi]$, thỏa mãn $\int_0^\pi \sin x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos x f(x)\mathrm{d}x = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^\pi f^2(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{\pi}$. **B.** $\frac{3}{\pi}$. **C.** $\frac{4}{\pi}$. **D.** $\frac{3}{2\pi}$.

Lời giải. Liên kết với bình phương $\left[f(x)+\alpha\sin x+\beta\cos x\right]^2$.

Ta có $\int_0^\pi \left[f(x)+\alpha\sin x+\beta\cos x\right]^2\mathrm{d}x$

$$= \int_0^\pi [f(x)]^2\mathrm{d}x + 2\int_0^\pi (\alpha\sin x+\beta\cos x)f(x)\mathrm{d}x + \int_0^\pi (\alpha\sin x+\beta\cos x)^2\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\pi [f(x)]^2\mathrm{d}x + 2(\alpha+\beta) + \frac{\pi\alpha^2}{2} + \frac{\pi\beta^2}{2}.$$

Phân tích $2(\alpha+\beta)+\frac{\pi\alpha^2}{2}+\frac{\pi\beta^2}{2} = \frac{\pi}{2}\left(\alpha+\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(\beta+\frac{2}{\pi}\right)^2 - \frac{4}{\pi}$. **Chọn C.**

Câu 116. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 e^x f(x)\mathrm{d}x = 1$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 [f(x)]^2\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0<m<1$. **B.** $1<m<2$. **C.** $2<m<3$. **D.** $3<m<4$.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} a = \int_0^1 ae^x f(x)\mathrm{d}x \\ b = \int_0^1 bf(x)\mathrm{d}x \end{cases}$.

Theo Holder

$$(a+b)^2 = \left[\int_0^1 (ae^x+b)f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_0^1 (ae^x+b)^2\mathrm{d}x \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Lại có

$$\int_0^1 \left(ae^x+b\right)^2 \mathrm{d}x=\int_0^1 \left(a^2e^{2x}+2abe^x+b^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)a^2+2\left(e-1\right)ab+b^2.$$

Suy ra $\int_0^1 f^2\left(x\right)\mathrm{d}x \ge \dfrac{\left(a+b\right)^2}{\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)a^2+2\left(e-1\right)ab+b^2}$ với mọi $a,\ b\in\mathbb{R}$ và $a^2+b^2>0$.

Do đó $\int_0^1 f^2\left(x\right)\mathrm{d}x \ge \max\left\{\dfrac{\left(a+b\right)^2}{\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)a^2+2\left(e-1\right)ab+b^2}\right\}=-1+\dfrac{1}{3-e}+\dfrac{1}{e-1}\approx 3{,}1316.$ **Chọn D.**

Câu 117. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 \sqrt{x}f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f^2\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** 3.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} a=\int_0^1 a\sqrt{x}f\left(x\right)\mathrm{d}x \\ b=\int_0^1 bf\left(x\right)\mathrm{d}x \end{cases}$.

Theo Holder

$$\left(a+b\right)^2=\left(\int_0^1\left(a\sqrt{x}+b\right)f\left(x\right)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1\left(a\sqrt{x}+b\right)^2\mathrm{d}x.\int_0^1 f^2\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

Lại có

$$\int_0^1\left(a\sqrt{x}+b\right)^2\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}+\frac{4ab}{3}+b^2.$$

Suy ra $\int_0^1 f^2\left(x\right)\mathrm{d}x\ge\dfrac{\left(a+b\right)^2}{\frac{a^2}{2}+\frac{4ab}{3}+b^2}$ với mọi $a,\ b\in\mathbb{R}$ và $a^2+b^2>0$.

Do đó $\int_0^1 f^2\left(x\right)\mathrm{d}x\ge\max\left\{\dfrac{\left(a+b\right)^2}{\frac{a^2}{2}+\frac{4ab}{3}+b^2}\right\}=3.$ **Chọn D.**

Cách 2. Liên kết với bình phương $\left[f\left(x\right)+\alpha\sqrt{x}+\beta\right]^2$.

Ta có $\int_0^{\pi}\left[f\left(x\right)+\alpha\sqrt{x}+\beta\right]^2\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\pi}\left[f\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x+2\int_0^{\pi}\left(\alpha\sqrt{x}+\beta\right)f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\left(\alpha\sqrt{x}+\beta\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}\left[f\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x+2\left(\alpha+\beta\right)+\frac{\alpha^2}{2}+\frac{4}{3}\alpha\beta+\beta^2.$$

Phân tích $2\left(\alpha+\beta\right)+\dfrac{\alpha^2}{2}+\dfrac{4}{3}\alpha\beta+\beta^2=\left(\beta+\dfrac{2}{3}\alpha+1\right)^2+\dfrac{1}{18}\left(\alpha+6\right)^2-3.$

Câu 118. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[1;2\right]$, thỏa $\int_1^2 x^3f\left(x\right)\mathrm{d}x=31$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_1^2 f^4\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 961. **B.** 3875. **C.** 148955. **D.** 923521.

Lời giải. Ta có áp dụng hai lần liên tiếp bất đẳng thức Holder ta được

$$31^4=\left(\int_1^2 x^3 f(x)\mathrm{d}x\right)^4=\left(\left[\int_1^2 x^2.xf(x)\mathrm{d}x\right]^2\right)^2\le\left(\int_1^2 x^4\mathrm{d}x\right)^2\left(\int_1^2 x^2f^2(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\left(\int_1^2 x^4\mathrm{d}x\right)^3\int_1^2 f^4(x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int_1^2 f^4(x)\mathrm{d}x\ge\dfrac{31^4}{\left(\int_1^2 x^4\mathrm{d}x\right)^3}=3875.$

Dấu "=" xảy ra khi $f(x)=kx$ nên $k\int_1^2 x^4\mathrm{d}x=31\Leftrightarrow k=5\longrightarrow f(x)=5x^2$. **Chọn B.**

Câu 119. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm đến cấp 2 trên $[0;2]$ thỏa $f(0)-2f(1)+f(2)=1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^2[f''(x)]^2\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{5}{4}$.

Lời giải. Ta có $\int_0^1[f''(x)]^2\,\mathrm{d}x=3\int_0^1 x^2\mathrm{d}x.\int_0^1[f''(x)]^2\,\mathrm{d}x\overset{\text{Holder}}{\ge}3\left(\int_0^1 x.f''(x)\mathrm{d}x\right)^2$

$$\overset{\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f''(x)\mathrm{d}x\end{cases}}{=}3[f'(1)+f(0)-f(1)]^2;$$

$$\int_1^2[f''(x)]^2\,\mathrm{d}x=3\int_1^2(x-2)^2\,\mathrm{d}x.\int_1^2[f''(x)]^2\,\mathrm{d}x\overset{\text{Holder}}{\ge}3\left(\int_1^2(x-2).f''(x)\mathrm{d}x\right)2$$

$$\overset{\begin{cases}u=x-2\\ \mathrm{d}v=f''(x)\mathrm{d}x\end{cases}}{=}3[-f'(1)+f(2)-f(1)]^2.$$

Suy ra $\int_0^2[f''(x)]^2\,\mathrm{d}x\ge3[f'(1)+f(0)-f(1)]^2+3[-f'(1)+f(2)-f(1)]^2$

$$\ge3.\frac{[f(0)-2f(1)+f(2)]^2}{2}=\frac{3}{2}.$$ **Chọn B.**

Nhận xét: Lời giải trên sử dụng bất đẳng thức ở bước cuối là $a^2+b^2\ge\dfrac{(a+b)^2}{2}$.

Câu 120. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[1;3]$ và $f(1)=0,\ \max\limits_{[1;3]}|f(x)|=\sqrt{10}$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_1^3[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 20.

Lời giải. Vì $\max\limits_{[1;3]}|f(x)|=\sqrt{10}\longrightarrow\exists x_0\in[1;3]$ sao cho $|f(x_0)|=\sqrt{10}$

$$\xrightarrow{f(1)=0}\exists x_0\in(1;3]\text{ sao cho }|f(x_0)|=\sqrt{10}.$$

Theo Holder

$$\left(\int_1^{x_0}f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_1^{x_0}1^2\mathrm{d}x.\int_1^{x_0}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=(x_0-1).\int_1^{x_0}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

Mà $\left(\int_1^{x_0}f'(x)\mathrm{d}x\right)^2=\left(f(x)\Big|_1^{x_0}\right)^2=(f(x_0)-f(1))^2=10.$

Từ đó suy ra $\int_1^{x_0}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\ge\dfrac{10}{x_0-1}$

$\longrightarrow\int_1^3[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\ge\int_1^{x_0}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\ge\dfrac{10}{x_0-1}\ge\dfrac{10}{3-1}$. **Chọn B.**