TOÀN BỘ CÔNG THỨC PHẦN MŨ - LOGARIT

A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

a. Định nghĩa: Cho n là số nguyên dương và số thực a. Khi đó:

* $a^n = a.a......a$ (tích n số a)

* $a^0 = 1$ với mọi $a \neq 0$

* $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ với mọi $a \neq 0$

Ghi chú:

* Với $n \leq 0$ thì a^n có nghĩa $\Leftrightarrow a \neq 0$

* Với $\forall a \neq 0$ thì $a^n = \frac{1}{a^n}$

b. Các tính chất về đẳng thức:

Với hai số thực $a,b \neq 0$ và m,n là các số nguyên ta luôn có:

1. $a^m.a^n = a^{m+n}$ **3.** $(a^m)^n = a^{m.n}$ **5.** $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ **4.** $(ab)^n = a^nb^n$

c. Các tính chất về bất đẳng thức

Cho m,n là các số nguyên dương, ta có:

- Với $a > 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$
- Với $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$

Nhận xét: Với $a > 0$ thì $a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$

Cho $0 < a < b$ và số nguyên m ta có:

1. $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$ 2. $a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$

Nhận xét: Với $0 < a < b$ thì $a^m = b^m \Leftrightarrow m = 0$

Nếu n là số tự nhiên lẻ thì $a^n < b^n \Leftrightarrow a < b$

2. Căn bậc n

a. Định nghĩa: Với n là số nguyên dương, căn bậc n của a là số thực b thỏa mãn: $b^n = a$.

b. Tính chất : Cho a, b ≥ 0, hai số nguyên dương m,n và hai số nguyên tùy ý p,q. Ta có:

1. $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (b > 0)

3. $\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$

4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

5. Nếu $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}$ (a > 0)

3. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

a. Định nghĩa: Cho số thực a > 0 và số hữu tỉ r = $\frac{m}{n}$ (m, n là hai số nguyên , n > 0). Khi đó $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Chú ý: Lũy thừa số mũ hữu tỉ chỉ được định nghĩa cho số thực dương.

b. Tính chất: Lũy thừa với số mũ hữu tỉ có đầy đủ tính chất như lũy thừa với số mũ nguyên.

4. Lũy thừa với số mũ thực

a. Định nghĩa: Cho số thực dương a và α là số vô tỉ. Khi đó tồn tại dãy số hữu tỉ (r_n) có giới hạn α và $a^\alpha = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$

b. Tính chất: Lũy thừa với số mũ thực có đầy đủ các tính chất như lũy thừa với số mũ nguyên.

Lưu ý:

* Lũy thừa với số mũ nguyên và số mũ 0 thì cơ số khác 0.

* Lũy thừa với số mũ hữu tỉ và số thực thì cơ số dương.

5. Logarit

a, Định nghĩa: Cho a > 0, a ≠ 1, b > 0 thì $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$

Đặc biệt: $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$ $\quad \lg b = \alpha \Leftrightarrow 10^\alpha = b$ $\quad \ln b = \alpha \Leftrightarrow e^\alpha = b$

b, Tính chất:

- $\log_a 1 = 0$ $\quad\log_a a = 1$ $\quad a^{\log_a \alpha} = \alpha$ $\quad\log_a a^\alpha = \alpha$
- $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ $\quad\log_a(x_1x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
- $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b$ $\quad\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$

Đặc biệt:

$\log_a \frac{1}{b} = \log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$ $\quad\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b$ $\quad\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

- a > 1 => $\log_a b > \log_a c$ ⇔ b > c > 0
- 0 < a < 1 => $\log_a b > \log_a c$ ⇔ 0 < b < c

6. Hàm số mũ

a. Định nghĩa: Là hàm số có dạng y = a^x , trong đó a > 0 gọi là cơ số.

b. Tính chất:

* Tập xác định: R

* Giới hạn – đạo hàm

- Giới hạn: $\lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^e$ và $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$
- Đạo hàm: $(a^x)' = a^x.\ln a$. Từ đó suy ra: $(a^u)' = u'.a^u.\ln a$
  Đặc biệt: $(e^x)' = e^x$ và $(e^u)' = u'.e^u$

* Tính đơn điệu: a > 1 thì hàm đồng biến, nếu 0 < a < 1 hàm nghịch biến

7. Hàm số lũy thừa

a. Định nghĩa: Là hàm số có dạng: y = x^α , α ∈ R

b. Tính chất :

* Tập xác định:

- Nếu α là số nguyên dương thì tập xác định là R
- Nếu α nguyên âm hoặc bằng 0 thì tập xác định là R\{0}
- Nếu α không là số nguyên thì tập xác định là (0; + ∞)

* Đạo hàm: $(x^{\alpha})' = \alpha.x^{\alpha-1}$ từ đó suy ra: $[(u(x))^{\alpha}]' = \alpha.u'(x).(u(x))^{\alpha-1}$

Đặc biệt: $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n.\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ và $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u\prime(x)}{n.\sqrt[n]{u^{n-1}(x)}}$

* Tính đơn điệu: Hàm đồng biến trên (0; + ∞) nếu α > 0 và nghịch biến trên (0;+ ∞) nếu α<0.

8. Hàm số logarit

a. Định nghĩa: Là hàm có dạng : $y = \log_a x$, trong đó $0 < a \neq 1$.

b. Tính chất:

* Tập xác định là tập (0; +∞)

* Giới hạn – Đạo hàm:

- Giới hạn: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- Đạo hàm: $(\log_a x)' = \frac{1}{x.\ln a}$. Từ đó, suy ra: $(\log_a u)' = \frac{u\prime}{u.\ln a}$
  Đặc biệt: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ và $(\ln u)' = \frac{u\prime}{u}$

* Tính đơn điệu: Hàm đồng biến khi a > 1 và nghịch biến khi 0 < a < 1