



Nguyễn Thanh Nhân

Tóm tắt kiến thức
TOÁN 11

Lưu hành nội bộ

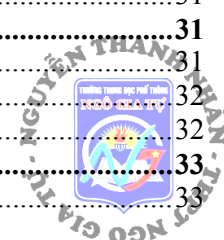
Điều chỉnh, bổ sung năm 2011

MỤC LỤC

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	4
1. Độ và radian	4
2. Các hệ thức cơ bản.....	4
3. Các hệ quả cần nhớ	4
4. Các cung liên kết	5
5. Các công thức biến đổi.....	6
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	8
1. Các hàm số lượng giác	8
2. Tập xác định của hàm số	9
3. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số	9
4. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số.....	9
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	10
1. Phương trình lượng giác cơ bản.....	10
2. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác	12
3. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$	12
4. Phương trình đẳng cấp bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$	13
5. Phương trình đối xứng, phản đối xứng	13
6. Phương trình lượng giác khác.....	13
ĐẠI SỐ TỔ HỢP	14
1. Phép đếm	14
2. Hoán vị	14
3. Chỉnh hợp	14
4. Tổ hợp	15
5. Cách phân biệt tổ hợp và chỉnh hợp.....	15
NHỊ THỨC NEWTON	15
1. Khai triển nhị thức Newton	15
2. Tam giác Pascal	15
3. Giải phương trình.....	16
XÁC SUẤT.....	16
DÃY SỐ.....	17
1. Tính đơn điệu của dãy số	17
2. Tính bị chặn của dãy số.....	17
CẤP SỐ CỘNG.....	18
1. Định nghĩa	18
2. Tính chất.....	18
3. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng	18
CẤP SỐ NHÂN.....	18
1. Định nghĩa	18



2. Tính chất.....	18
3. Tổng n số hạng đầu tiên.....	18
GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ.....	19
1. Định nghĩa.....	19
2. Tính chất.....	19
3. Một số giới hạn cơ bản.....	19
4. Cách tìm giới hạn.....	19
GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ.....	20
HÀM SỐ LIÊN TỤC.....	22
1. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại x_0	22
2. Tìm m để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm đã chỉ ra.....	22
3. Chứng minh phương trình có nghiệm.....	22
ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ.....	22
1. Bảng các đạo hàm.....	22
2. Các qui tắc tính đạo hàm.....	23
3. Đạo hàm cấp cao.....	23
TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG CONG.....	23
CÁC PHÉP BIẾN HÌNH TRONG MẶT PHẪNG.....	26
I. Các phép biến hình.....	26
II. Vẽ ảnh của một hình qua phép biến hình.....	27
III. Tìm phương trình của ảnh.....	27
ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG.....	28
1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.....	28
2. Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P).....	28
3. Chứng minh 3 điểm thẳng hàng.....	28
4. Tìm thiết diện.....	29
QUAN HỆ SONG SONG.....	29
I. Các định nghĩa.....	29
II. Các tính chất.....	29
III. Chứng minh hai đường thẳng song song.....	30
IV. Chứng minh đường thẳng song song mặt phẳng.....	30
V. Chứng minh hai mặt phẳng song song.....	31
VI. Chứng minh hai đường thẳng chéo nhau.....	31
QUAN HỆ VUÔNG GÓC.....	31
I. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc.....	31
II. Chứng minh đường thẳng vuông góc mặt phẳng.....	32
III. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc.....	32
GÓC.....	33
1. Góc φ giữa hai đường thẳng a, b.....	33



- 2. Góc φ giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P)..... 33
- 3. Góc φ giữa hai mặt phẳng (P) và (Q)..... 33

KHOẢNG CÁCH 33

- 1. Khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a 33
- 2. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (P)..... 33
- 3. Khoảng cách giữa đường thẳng $a // (P)$ 34
- 4. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) // (Q)..... 34
- 5. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau..... 34

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC 34

- 1. Định lí cô sin 34
- 2. Định lí sin 35
- 3. Công thức tính diện tích tam giác 35
- 4. Các hệ thức lượng trong tam giác vuông 36



PHẦN 1: ĐẠI SỐ

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. Độ và radian:

$$(180)^0 = \pi(\text{rad}); \quad 1^0 = \frac{\pi}{180}(\text{rad}); \quad 1(\text{rad}) = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$$

2. Các hệ thức cơ bản:

$$* \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0); \quad * \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0)$$

$$* \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \forall \alpha;$$

$$* 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right)$$

$$* 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\alpha \neq k\pi, k \in \mathbf{Z})$$

$$* \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \quad \left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right).$$

3. Các hệ quả cần nhớ:

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha; \quad \cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha$$

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha; \quad \cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha$$

$$\tan \alpha \text{ xác định khi } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$\cot \alpha \text{ xác định khi } \alpha \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

$$* \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$* \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$



Dấu các giá trị lượng giác:

GTLG \ Góc phần tư	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	-	-
$\cos\alpha$	+	-	-	+
$\tan\alpha$	+	-	+	-
$\cot\alpha$	+	-	+	-

4. Các cung liên kết:

a. Cung đối: α và $-\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha;$	$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha;$	$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

b. Cung bù: α và $\pi - \alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha;$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha;$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

c. Cung phụ: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha;$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha;$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$

d. Cung hơn kém nhau π : α và $\pi + \alpha$

$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha;$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha;$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

e. Cung hơn kém nhau $\frac{\pi}{2}$: α và $\frac{\pi}{2} + \alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha;$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$
$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha;$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$



5. Các công thức biến đổi:

a. Công thức cộng:

- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
- $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$
- $\cot(a \pm b) = \frac{1 \mp \tan a \tan b}{\tan a \pm \tan b}$

b. Công thức nhân đôi:

- $\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} ; \quad \cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a}$

* Công thức tính theo $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

c. Công thức hạ bậc:

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}; \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}; \quad \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

Lưu ý:

$$* 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$* 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

d. Công thức biến đổi tích về tổng:



$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

e. Công thức biến đổi tổng về tích:

$$\bullet \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\bullet \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\bullet \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\bullet \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\bullet \tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \left(\alpha; \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right)$$

Chú ý:

$$* \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$* \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$



f. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt:

Góc	0 ⁰	30 ⁰	45 ⁰	60 ⁰	90 ⁰	120 ⁰	135 ⁰	150 ⁰	180 ⁰
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∥	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot	∥	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∥



HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Các hàm số lượng giác:

$y = \sin x$	$y = \cos x$
<ul style="list-style-type: none"> - TXĐ: $D = \mathbb{R}$ - Là hàm số lẻ - Hàm tuần hoàn với chu kì 2π - Tập giá trị: $T = [-1; 1]$ - Hàm số đồng biến trong $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ - Hàm số nghịch biến trong $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ 	<ul style="list-style-type: none"> - TXĐ: $D = \mathbb{R}$ - Là hàm số chẵn - Hàm tuần hoàn với chu kì 2π - Tập giá trị: $T = [-1; 1]$ - Hàm số đồng biến trong $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ - Hàm số nghịch biến trong $(k2\pi; \pi + k2\pi)$



$y = \tan x$	$y = \cot x$
- TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ - Là hàm số lẻ - Hàm tuần hoàn với chu kỳ π - Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$ - Hàm số đồng biến trong $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ - Có các đường tiệm cận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	- TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ - Là hàm số lẻ - Hàm tuần hoàn với chu kỳ π - Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$ - Hàm số nghịch biến trong $(k\pi; \pi + k\pi)$ - Có các đường tiệm cận $x = k\pi$

2. Tập xác định của hàm số:

- a) $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ xác định khi $Q(x) \neq 0$
- b) $y = \sqrt{P(x)}$ xác định khi $P(x) \geq 0$
- c) $y = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$ xác định khi $Q(x) > 0$
- d) $y = \sin f(x); y = \cos f(x)$ xác định khi $f(x)$ xác định.
- e) $y = \tan f(x)$ xác định khi $f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- f) $y = \cot f(x)$ xác định khi $f(x) \neq k\pi$

3. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số:

- a) Áp dụng các tính chất của bất đẳng thức, và với mọi x ta có:
 $-1 \leq \sin x \leq 1; -1 \leq \cos x \leq 1; 0 \leq \sin^2 x \leq 1; 0 \leq \cos^2 x \leq 1$
- b) Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = a \sin x + b \cos x + c$
 $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}$
 $\Leftrightarrow c - \sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x + c \leq c + \sqrt{a^2 + b^2}$

4. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D.



* Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số chẵn nếu $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

* Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số lẻ nếu $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$



PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1. Phương trình lượng giác cơ bản:

a) Phương trình $\sin x = m$

* Điều kiện có nghiệm: $|m| \leq 1$

* Tìm góc a sao cho $\sin a = m$ (sử dụng MTCT: $a = \sin^{-1} m$). Ta được: $\sin x = \sin a$ và áp dụng công thức:

$$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Hay $\begin{cases} u = v + k360^\circ \\ u = 180^\circ - v + k360^\circ \end{cases}$ nếu trong phương trình có cho độ.

* Trường hợp đặc biệt:

$$\begin{cases} \circ \sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi \\ \circ \sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \circ \sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

* Nếu không phải là giá trị đặc biệt thì có thể sử dụng công thức:

$$\sin u = m \Leftrightarrow \begin{cases} u = \arcsin m + k2\pi \\ u = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{cases} \left(-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin m \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$* -\sin u = \sin(-u); \cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right); -\cos u = \sin\left(u - \frac{\pi}{2}\right)$$

b) Phương trình $\cos x = m$

* Điều kiện có nghiệm: $|m| \leq 1$

* Tìm góc a sao cho $\cos a = m$ (sử dụng MTCT: $a = \cos^{-1} m$). Ta được: $\cos x = \cos a$ và áp dụng công thức:



$$\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hay $\begin{cases} u = v + k360^0 \\ u = -v + k360^0 \end{cases}$ nếu trong phương trình có cho độ.

* Trường hợp đặc biệt:

$$\begin{cases} \circ \cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \circ \cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi \\ \circ \cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi \end{cases}$$

* Nếu không phải là giá trị đặc biệt thì có thể sử dụng công thức:

$$\cos u = m \Leftrightarrow \begin{cases} u = \arccos m + k2\pi \\ u = -\arccos m + k2\pi \end{cases} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin m \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$* -\cos u = \cos(\pi - u); \sin u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right); -\sin u = \cos\left(u + \frac{\pi}{2}\right)$$

c) Phương trình $\tan x = m \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

* Tìm góc a sao cho $\tan a = m$ (sử dụng MTCT: $a = \tan^{-1} m$)

Ta được: $\tan x = \tan a$ và áp dụng công thức

$$\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi$$

Hay $u = v + k180^0$ nếu trong phương trình có độ.

* Đặc biệt:

$$\begin{cases} \circ \tan u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi \\ \circ \tan u = \pm 1 \Leftrightarrow u = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

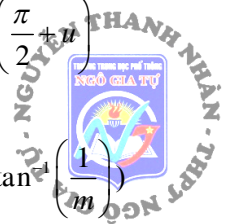
* Nếu m không phải là giá trị đặc biệt có thể sử dụng công thức:

$$\tan u = m \Leftrightarrow u = \arctan m + k\pi \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \arctan m < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$* -\tan u = \tan(-u); \cot u = \tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right); -\cot u = \tan\left(\frac{\pi}{2} + u\right)$$

d) Phương trình $\cot x = m \left(x \neq k\pi \right)$

* Tìm góc a sao cho $\cot a = m$ (sử dụng MTCT: $a = \cot^{-1} m$)



Ta được: $\cot x = \cot a$ và áp dụng công thức

$$\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi$$

Hay $u = v + k180^\circ$ nếu trong phương trình có độ.

* Đặc biệt:

$$\circ \cot u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\circ \tan u = \pm 1 \Leftrightarrow u = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$$

* Nếu m không phải là giá trị đặc biệt có thể sử dụng công thức:

$$\cot u = m \Leftrightarrow u = \operatorname{arccot} m + k\pi \quad (0 < \operatorname{arccot} m < \pi)$$

$$* -\cot u = \cot(-u); \tan u = \cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right); -\tan u = \cot\left(\frac{\pi}{2} + u\right)$$

2. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác:

Dạng	Đặt	Điều kiện
$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$	$t = \sin x$	$-1 \leq t \leq 1$
$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$	$t = \cos x$	$-1 \leq t \leq 1$
$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$	$t = \tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
$a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$	$t = \cot x$	$x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Giải lấy nghiệm t thích hợp sau đó áp dụng phương trình cơ bản.

Chú ý:

$$\circ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\circ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\circ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

3. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$:

a) Dạng phương trình: $a\sin x + b\cos x = c$

b) Điều kiện có nghiệm: $a^2 + b^2 \geq c^2$

c) Phương pháp giải:

Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$

$$\text{Ta được phương trình: } \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Đặt $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Ta được phương trình:

$$\sin x \cos \alpha + \sin \alpha \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (*)$$

(*) là phương trình dạng cơ bản.

4. Phương trình đẳng cấp bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$

a) **Dạng:** $a.\sin^2 x + b.\sin x.\cos x + c.\cos^2 x = d \quad (1)$

b) **Phương pháp giải:**

* Kiểm tra $\cos x = 0$ có thỏa mãn hay không?

Lưu ý: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1$.

* Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình (1) cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được:

$$a.\tan^2 x + b.\tan x + c = d(1 + \tan^2 x)$$

* Đặt: $t = \tan x$, đưa về phương trình bậc hai theo t :

$$(a - d)t^2 + b.t + c - d = 0$$

5. Phương trình đối xứng, phản đối xứng:

a) **Dạng:** $a.(\sin x \pm \cos x) + b.\sin x.\cos x + c = 0$

b) **Phương pháp giải:**

* Đặt: $t = \cos x \pm \sin x = \sqrt{2}.\cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right); |t| \leq \sqrt{2}$.

$$\Rightarrow t^2 = 1 \pm 2 \sin x.\cos x \Rightarrow \sin x.\cos x = \pm \frac{1}{2}(t^2 - 1).$$

* Thay vào phương trình đã cho, ta được phương trình bậc hai theo t .

Giải phương trình này tìm t thỏa $|t| \leq \sqrt{2}$. Suy ra x .

Chú ý:

* $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

* $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

6. Phương trình lượng giác khác:

Để giải một phương trình lượng giác chưa phải là các dạng quen thuộc ta cần sử dụng các phép biến đổi lượng giác để đưa phương trình về dạng quen



thuộc, có thể phân tích phương trình đã cho về dạng phương trình tích hoặc áp dụng tính chất bất đẳng thức để đưa về hệ phương trình để giải.

Các phương pháp giải phương trình lượng giác thường sử dụng:

* Biến đổi phương trình đã cho về một trong các dạng phương trình cơ bản đã biết (đưa về cùng một cung hoặc cùng một hàm số lượng giác,...).

* Biến đổi phương trình đã cho về dạng tích: $A.B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

* Biến đổi phương trình về dạng có thể đặt ẩn số phụ (đối xứng, đặt $t = \tan \frac{x}{2}, \dots$)



ĐẠI SỐ TỔ HỢP

1. Phép đếm:

a) Quy tắc cộng:

Giả sử để hoàn thành hành động (H) ta có thể thực hiện qua các trường hợp A hoặc B hoặc C ... (mỗi trường hợp đều hoàn thành công việc)

Nếu A có m cách, B có n cách, C có p cách thì có $m + n + p$... cách để hoàn thành (H).

b) Quy tắc nhân:

Giả sử để hoàn thành hành động (H) ta phải qua nhiều công đoạn (bước) A, B, C liên tiếp nhau.

Công đoạn A có m cách, công đoạn B có n cách, công đoạn C có p cách... Khi đó để hoàn thành (H) thì có $m.n.p$... cách

2. Hoán vị:

a) Hoán vị:

Cho tập A có n phần tử, mỗi cách sắp thứ tự n phần tử của A gọi là một hoán vị.

b) Số các hoán vị n phần tử: $P_n = n!$

Chú ý: Giai thừa

$$* n! = n.(n-1)...3.2.1$$

$$* \text{Qui ước: } 0! = 1$$

3. Chỉnh hợp:

a) Chỉnh hợp:



Cho tập A có n phần tử, mỗi bộ sắp thứ tự gồm k phần tử lấy trong n phần tử của A ($k \in \mathbb{N}, 0 < k \leq n$) gọi là một chỉnh hợp chập k của n.

b) Số các chỉnh hợp chập k của n:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

4. Tổ hợp:

a) Tổ hợp:

Cho tập A có n phần tử, mỗi tập hợp con gồm k phần tử của A ($k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$) gọi là một tổ hợp chập k của n.

b) Số các tổ hợp chập k của n: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

c) Tính chất: $C_n^0 = C_n^n = 1$ $C_n^k = C_n^{n-k}$ $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

5. Cách phân biệt tổ hợp và chỉnh hợp:

- * Chỉnh hợp có tính đến thứ tự của k phần tử.
- * Tổ hợp không tính đến thứ tự của k phần tử.



NHỊ THỨC NEWTON

1. Khai triển nhị thức Newton:

$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$ Số hạng tổng quát thứ k+1 của khai triển: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

2. Tam giác Pascal: (cho biết giá trị của C_n^k)

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Muốn tìm C_n^k ta tìm số ở dòng n, cột k. Ví dụ: $C_6^3 = 20$ (dòng 6, cột 3)

3. Giải phương trình:

Để giải phương trình ta cần đặt điều kiện cho ẩn số và áp dụng công thức hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp đưa về phương trình đại số để giải.

Chú ý chỉ lấy những nghiệm thỏa mãn điều kiện.



XÁC SUẤT

1. Tập hợp Ω tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử được gọi là không gian mẫu.

a) Gieo n con súc sắc thì $|\Omega| = 6^n$

b) Gieo n đồng tiền thì $|\Omega| = 2^n$

c) Lấy k viên bi trong hộp có n viên bi thì $|\Omega| = C_n^k$

d) Hộp 1 có m viên bi, hộp 2 có n viên bi. Lấy k viên ở hộp 1 và h viên ở hộp 2 thì $|\Omega| = C_m^k C_n^h$

2. Một biến cố A liên quan tới phép thử T là $\Omega_A \subset \Omega$. Biến cố A xảy ra khi và chỉ khi kết quả của T thuộc Ω_A . Mỗi phần tử của Ω_A gọi là kết quả thuận lợi cho A.

3. Hai biến cố A, B gọi là xung khắc nếu A, B không đồng thời xảy ra.

4. Hai biến cố A, B gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

5. Xác suất của A là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$

6. A_1, A_2, \dots, A_k là các biến cố đôi một xung khắc thì

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$$

7. A_1, A_2, \dots, A_k là các biến cố độc lập thì

$$P(A_1 A_2 \dots A_k) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_k)$$

8. \bar{A} là biến cố đối của biến cố A thì: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

9. X là biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

a) Kỳ vọng của X là $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$ với $p_i = P(X = x_i), i = 1, 2, 3, \dots, n$



b) Phương sai của X là $V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i$ hay

$$V(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \mu^2 \text{ trong đó } p_i = P(X = x_i), i = 1, 2, \dots, n \text{ và } \mu = E(X)$$

c) Độ lệch chuẩn: $\sigma(X) = \sqrt{E(X)}$



DÃY SỐ

1. Tính đơn điệu của dãy số:

a) **Định nghĩa:** Cho dãy số (u_n) nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có:

- * $u_n < u_{n+1}$ thì dãy số (u_n) là dãy số tăng.
- * $u_n > u_{n+1}$ thì dãy số (u_n) là dãy số giảm.
- * Một dãy tăng (hay giảm) gọi là dãy số đơn điệu.

b) **Cách xét tính đơn điệu của dãy số:**

Để xét tính đơn điệu của một dãy số ta có thể áp dụng tính chất bất đẳng thức để suy trực tiếp. Hoặc xét hiệu $T = u_{n+1} - u_n$

- * Nếu $T > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- * Nếu $T < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Nếu $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ ta có thể xét $\frac{u_n}{u_{n+1}}$

- * $\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.
- * $\frac{u_n}{u_{n+1}} < 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.

2. Tính bị chặn của dãy số:

a) **Định nghĩa:** Cho dãy số (u_n) nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có:

- * $\exists M : u_n \leq M$ thì dãy số (u_n) bị chặn trên.
- * $\exists m : u_n \geq m$ thì dãy số (u_n) bị chặn dưới.
- * Dãy số vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới gọi là dãy số bị chặn.



CẤP SỐ CỘNG

1. Định nghĩa:

(u_n) là một cấp số cộng nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*$ tồn tại số d sao cho $u_{n+1} = u_n + d$
 d : công sai
 u_n : số hạng tổng quát thứ n .

2. Tính chất:

- a) Số hạng tổng quát thứ n : $u_n = u_1 + (n-1)d$
 b) (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n-1} + u_{n+1} = 2u_n, \forall n > 1$

3. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng:

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$$



CẤP SỐ NHÂN

1. Định nghĩa:

(u_n) là một cấp số nhân nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*$ tồn tại số q sao cho $u_{n+1} = u_n \cdot q$
 q : công bội
 u_n : số hạng tổng quát thứ n .

2. Tính chất:

- a) Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$
 b) (u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_{n-1} \cdot u_{n+1} = [u_n]^2, \forall n > 1$

3. Tổng n số hạng đầu tiên:

- * $q = 1$ thì $S_n = n \cdot u_1$
 * $q \neq 1$ thì $S_n = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

* CSN lùi vô hạn là CSN có công bội $|q| < 1$ có tổng $S = \frac{u_1}{1-q}$



GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Định nghĩa:

a) $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \forall n, |u_n|$ nhỏ hơn một số dương cho trước nhỏ tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi.

b) $\lim u_n = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim (u_n - L) = 0$

c) $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall n, u_n$ lớn hơn một số dương cho trước tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi.

d) $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall n, u_n$ nhỏ hơn một số dương cho trước tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi.

2. Tính chất:

a) $\lim (u_n \pm v_n) = \lim u_n \pm \lim v_n$

b) $\lim (u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$

c) $\lim (k \cdot u_n) = k \cdot \lim u_n$

d) $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n} (\lim v_n \neq 0)$

e) $\lim u_n = L \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}; \lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L} (L \geq 0)$

f) $\left. \begin{array}{l} |u_n| < v_n \\ \lim v_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim u_n = 0$

3. Một số giới hạn cơ bản:

a) $\lim \frac{1}{n^\alpha} = 0$

b) $\lim n^\alpha = +\infty (\alpha \in \mathbb{N}^*)$

c) $\lim q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ +\infty, & q > 1 \end{cases}$

e) $\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$

4. Cách tìm giới hạn:

a) Đặt thừa số chung n lũy thừa cao nhất trong cả tử số và mẫu số, sau đó đơn giản thừa số chung đó rồi áp dụng các tính chất và các giới hạn cơ bản để tính.

b) Khi trong giới hạn có căn thức ta có thể nhân chia cho biểu thức liên hợp.



GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

$$1. \lim_{x \rightarrow a} (u \pm v) = \lim_{x \rightarrow a} u \pm \lim_{x \rightarrow a} v$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} (u \cdot v) = \lim_{x \rightarrow a} u \cdot \lim_{x \rightarrow a} v$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} u}{\lim_{x \rightarrow a} v} \quad (\lim_{x \rightarrow a} v \neq 0)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{u} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} u} \quad (\lim_{x \rightarrow a} u \geq 0)$$

$$5. \begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$6. \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

7. Quy tắc tính giới hạn:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = (\pm)\infty \quad (\text{tùy theo dấu của } \lim_{x \rightarrow a} f(x))$$

và L .

8. Hàm số liên tục:

$$\boxed{\text{Hàm số } y = f(x) \text{ liên tục tại } a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)}$$

9. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trong $(a; b)$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong $(a; b)$.

10. Giới hạn một bên:

$$a) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Leftrightarrow x > a; \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \Leftrightarrow x < a$$

b) Giới hạn vô cực:

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ khi } f(a) \neq 0, g(a) = 0. \text{ Phân tích } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-a) \cdot g_1(x)}.$$

$$\text{Tính } M = \frac{f(a)}{g(a)}. \text{ Ta có: } \lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = M \cdot (\pm\infty)$$

11. Một số dạng vô định:

$$a) \text{ Dạng vô định } \frac{0}{0}$$



Phương pháp: Tìm $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ mà $f(a) = g(a) = 0$

Phân tích tử số và mẫu số thành các thừa số trong đó có chứa $(x - a)$ sau đó đơn giản tử và mẫu cho $(x - a)$.

Chú ý:

* Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm x_0 thì

$$ax^2 + bx + c = (x - x_0) \left(ax - \frac{c}{x_0} \right)$$

* Cũng có thể thực hiện phép chia đa thức cho $(x - x_0)$

* Khi trong giới hạn có căn thức ta có thể nhân chia cho biểu thức liên hợp.

b) Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

Phương pháp: Áp dụng các công thức

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty \quad (\alpha \in \mathbb{N}^*) \qquad * \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

* Nếu tính giới hạn dạng hữu tỷ ta đặt nhân tử x lũy thừa cao nhất ở cả tử số và mẫu số, đơn giản và áp dụng các công thức trên.

Chú ý:

$$\text{Nếu } a > 0 \text{ thì } \sqrt{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} x \cdot \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} & \text{khi } x \rightarrow +\infty \\ -x \cdot \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} & \text{khi } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

c) Dạng vô định $\infty - \infty$ và $0 \cdot \infty$

Phương pháp: Thực hiện phép biến đổi đưa về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$



HÀM SỐ LIÊN TỤC

1. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại x_0

- * Tính $f(x_0)$ (nếu $f(x_0)$ không tồn tại thì hàm số không liên tục)
- * Tìm $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, khi cần có thể tính giới hạn 1 bên.
- * So sánh $f(x_0)$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ để kết luận.

2. Tìm m để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm đã chỉ ra

Phương pháp:

- * Tính $f(a)$ và tìm $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- * Hàm số liên tục tại $x = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Từ điều kiện này tìm m, khi cần có thể tìm giới hạn 1 bên.

3. Chứng minh phương trình có nghiệm:

Phương pháp:

- * Đặt $f(x)$ là vế trái của phương trình, $f(x)$ liên tục trong D.
- * Tìm hai số $a, b \in D$ sao cho $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình có nghiệm $x \in (a; b)$



ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ

1. Bảng các đạo hàm:

Hàm số $y = f(x)$	Hàm số hợp $y = f(u), u = g(x)$
$(C)' = 0$ C: hằng số	$y'_x = y'_u \cdot u'_x$
$(x)' = 1$	
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$	$(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$
$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$



Hàm số $y = f(x)$	Hàm số hợp $y = f(u), u = g(x)$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$

2. Các qui tắc tính đạo hàm:

Cho các hàm số u, v, w lần lượt có đạo hàm u', v', w' . Ta có:

a) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$

b) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ Hệ quả: $(C \cdot u)' = C \cdot u'$ (C: hằng số)

c) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

d) $u = u(x)$ có đạo hàm theo x là u'_x , $y = f(u)$ có đạo hàm theo u là y'_u thì hàm số $y = f[u(x)]$ có đạo hàm theo x là $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

3. Đạo hàm cấp cao:

* Đạo hàm của y' gọi là đạo hàm cấp 2, kí hiệu y''

* Đạo hàm của y'' gọi là đạo hàm cấp 3, kí hiệu y'''

* Đạo hàm của đạo hàm cấp $(n - 1)$ gọi là đạo hàm cấp n , kí hiệu $y^{(n)}$

4. Ý nghĩa hình học của đạo hàm:

- Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm $M_0(x_0; y_0)$.

- Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ có phương trình là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$



TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG CONG

Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$:

Có 7 dạng sau:

Dạng 1: Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ (với $y_0 = f(x_0)$)

Phương trình tiếp tuyến có dạng: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Dạng 2: Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = x_0$ thuộc (C)

- Tìm $y_0 = f(x_0)$ và $f'(x_0)$
- Viết phương trình tiếp tuyến dạng: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Chú ý: Nếu bài toán yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (C) và trục tung thì $x_0 = 0$

Dạng 3: Tiếp tuyến tại điểm có tung độ $y = y_0$ thuộc (C)

- Giải phương trình $f(x) = y_0$ tìm $x = x_0$
- Tìm $f'(x_0)$
- Viết phương trình tiếp tuyến dạng: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Chú ý: Nếu bài toán yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (C) và trục hoành thì $y_0 = 0$

Dạng 4: Tiếp tuyến có hệ số góc k cho trước

- Tính $y' = f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = k$ tìm nghiệm $x = x_0$
- Tính $y_0 = f(x_0)$
- Viết phương trình tiếp tuyến dạng: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Dạng 5: Tiếp tuyến song song với đường thẳng d: $y = ax + b$

- Do tiếp tuyến song song với đường thẳng d nên hệ số góc k của tiếp tuyến bằng a (tức là $k_{tt} = a$, viết như dạng 4)

Dạng 6: Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng d: $y = ax + b$

- Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng d nên $k_{tt} \cdot a = -1 \Leftrightarrow k_{tt} = -\frac{1}{a}$
(viết như dạng 4)

Dạng 7: Tiếp tuyến tạo với đường thẳng d: $y = ax + b$

$\varphi, 0 < \varphi \leq 90$



- Gọi α, β lần lượt là góc hợp bởi tiếp tuyến (d), đường thẳng (Δ) với chiều dương trục hoành. Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến, khi đó ta có: $\varphi = |\alpha - \beta|$ suy ra:

$$\tan \varphi = \tan |\alpha - \beta| = \left| \tan(\alpha - \beta) \right| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| = \left| \frac{k - a}{1 + ak} \right| \quad (1)$$

- Giải phương trình (1) tìm được hệ số góc k của tiếp tuyến (như dạng 4)



PHẦN 2: HÌNH HỌC

CÁC PHÉP BIẾN HÌNH TRONG MẶT PHẪNG

I. Các phép biến hình:

1. Phép tịnh tiến theo vector \vec{v} :

a) Định nghĩa và kí hiệu: $T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

b) Biểu thức tọa độ: $M(x; y), M'(x'; y'), \vec{v} = (a; b)$. Ta có:

$$T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

2. Phép đối xứng trục d:

a) Định nghĩa và kí hiệu: $D_d(M) = M' \Leftrightarrow d$ là đường trung trực của MM' .

b) Biểu thức tọa độ:

* $M(x; y), M'(x'; y')$ qua phép đối xứng trục Ox: $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

* $M(x; y), M'(x'; y')$ qua phép đối xứng trục Oy: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

3. Phép đối xứng tâm I:

a) Định nghĩa và kí hiệu: $D_I(M) = M' \Leftrightarrow I$ là trung điểm của MM'

b) Biểu thức tọa độ: $M(x; y), M'(x'; y'), I(a; b)$. Ta có:

$$D_I(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$

4. Phép quay tâm O, góc quay α :

Định nghĩa và kí hiệu:

$Q_{(O, \alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow (\overline{OM}, \overline{OM'}) = \alpha$ (α là góc định hướng)

5. Phép vị tự tâm I, tỷ số k:

a) Định nghĩa và kí hiệu:

$V_{(I, k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overline{IM'} = k \overline{IM}$

b) Biểu thức tọa độ: $M(x; y), M'(x'; y'), I(a; b)$. Ta có:



$$V_{(I,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' - a = k(x - a) \\ y' - b = k(y - b) \end{cases}$$

Chú ý:

$$\begin{cases} M \xrightarrow{F} M' \\ (H) \xrightarrow{F} (H') \Rightarrow M' \in (H') \\ M \in (H) \end{cases}$$

II. Vẽ ảnh của một hình qua phép biến hình:

1. Vẽ ảnh của một điểm:

- Qua phép tịnh tiến: Lấy M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$
- Qua phép Đối xứng trục d : Lấy M' sao cho d là đường trung trực của MM'
- Qua phép Đối xứng tâm I : Lấy M' sao cho I là trung điểm MM'
- Qua phép Vị tự $V_{(I,k)}$: Trên đường thẳng IM lấy M' sao cho đoạn $IM' = |k| \cdot OM$

* M, M' cùng phía đối với I nếu $k > 0$

* M, M' khác phía đối với I nếu $k < 0$

2. Vẽ ảnh của tam giác: Lần lượt vẽ ảnh của các đỉnh.

3. Vẽ ảnh của đường thẳng d : Trên d lấy hai điểm A, B ; vẽ ảnh A', B' của A, B . Ảnh của d là đường thẳng $A'B'$

4. Vẽ ảnh của một đường tròn:

* Vẽ I' là ảnh của tâm I qua phép biến hình.

* Vẽ đường tròn tâm I' có bán kính bằng R (nếu là phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, đối xứng tâm, phép quay), bán kính bằng $|k| \cdot R$ (nếu là phép vị tự)

III. Tìm phương trình của ảnh:

Phương pháp:

Cho hình (H) có phương trình $f(x; y) = 0$, viết phương trình (H') là ảnh của (H) qua phép biến hình F có biểu thức tọa độ $\begin{cases} x' = u(x) \\ y' = v(y) \end{cases}$

Cách giải:

* Gọi $M(x; y), M'(x'; y') = F(M)$



* Khi đó: $\begin{cases} x' = u(x) \\ y' = v(y) \end{cases}$ tính x theo x', y theo y'

* $M(x; y) \in (H) \Leftrightarrow f(x; y) = 0$ thay x, y vừa tìm được vào phương trình $f(x; y) = 0$ ta được phương trình $g(x'; y') = 0$. $M'(x'; y') \in (H')$ nên phương trình của (H') là $g(x'; y') = 0$.



ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

a) **Cách 1:** Để tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (Q) ta tìm hai điểm chung phân biệt A, B. Giao tuyến là đường thẳng AB.

* $A \in (P), A \in (Q) \Rightarrow A$ là điểm chung thứ nhất.

* $B \in (P), B \in (Q) \Rightarrow B$ là điểm chung thứ hai.

Vậy $(P) \cap (Q) = AB$

b) **Cách 2:** (Khi đã học xong chương quan hệ song song)

* Tìm một điểm chung S của (P) và (Q) $\Rightarrow (P) \cap (Q) = Sx$

* Chứng minh Sx song song với 1 đường thẳng cho trước.

Chú ý: $\begin{cases} A \in (d), (d) \subset (P) \Rightarrow A \in (P) \\ A = (d) \cap (a) \Rightarrow A \in (d) \text{ và } A \in (a) \\ A = (d) \cap (P) \Rightarrow A \in (d) \text{ và } A \in (P) \\ (d) = (P) \cap (Q) \Rightarrow (d) \subset (P) \text{ và } (d) \subset (Q) \end{cases}$

2. Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P):

a) **Cách 1:**

* Tìm một mặt phẳng phụ (Q) chứa d

* Tìm giao tuyến a của (P) và (Q).

* Trong mặt phẳng (Q) tìm $M = a \cap d$. Suy ra $M = d \cap (P)$

b) **Cách 2:** Tìm trong mặt phẳng (P) đường thẳng a mà $a \cap d = M$

$\Rightarrow \begin{cases} M \in a, M \in (P) \\ M \in d \end{cases} \Rightarrow M = d \cap (P)$

3. Chứng minh 3 điểm thẳng hàng:

Ta chứng minh 3 điểm đó cùng thuộc 2 mặt phẳng phân biệt nào đó.



$$\begin{cases} A \in (P), A \in (Q) \\ B \in (P), B \in (Q) \Rightarrow A, B, C \text{ thẳng hàng.} \\ C \in (P), C \in (Q) \end{cases}$$

4. Tìm thiết diện:

Để tìm thiết diện tạo bởi một mặt phẳng với một khối đa diện ta tìm các giao điểm của mặt phẳng đó với các cạnh của khối đa diện (nếu có). Các giao điểm đó chính là đỉnh của thiết diện. Ta cũng có thể tìm các đoạn giao tuyến của mặt phẳng đó với các mặt của đa diện.



QUAN HỆ SONG SONG

I. Các định nghĩa:

1. **Hai đường thẳng song song:** $a // b \Leftrightarrow a, b$ cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.

2. **Đường thẳng song song với mặt phẳng:** $a // (P) \Leftrightarrow a \cap (P) = \emptyset$

3. **Hai mặt phẳng song song:** $(P) // (Q) \Leftrightarrow (P) \cap (Q) = \emptyset$

II. Các tính chất:

1. $\begin{cases} a // c \\ b // c \end{cases} \Rightarrow a // b$

2. $\begin{cases} a // c; (P) \cap (Q) = b \\ a \subset (P); c \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow a // b // c$

3. Ba mặt phẳng cắt nhau theo 3 giao tuyến phân biệt thì 3 giao tuyến đó song song hoặc đồng qui.

4. $\begin{cases} a // b; a \not\subset (P) \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a // (P)$

5. $\begin{cases} a // (P); a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow a // b$

6. $\begin{cases} a // (P), a // (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow a // b$

7. $\begin{cases} a \subset (Q) \\ (Q) // (P) \end{cases} \Rightarrow a // (P)$



8. Trong mặt phẳng (P) có hai đường thẳng a, b cắt nhau cùng song song mặt phẳng (Q) thì $(P) \parallel (Q)$

$$9. \begin{cases} (P) \parallel (R) \\ (Q) \parallel (R) \end{cases} \Rightarrow (P) \parallel (Q)$$

$$10. \begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ (P) \cap (R) = a \Rightarrow a \parallel b \\ (Q) \cap (R) = b \end{cases}$$

III. Chứng minh hai đường thẳng song song:

Để chứng minh hai đường thẳng a, b song song ta có thể áp dụng một trong các phương pháp sau:

$$1. \begin{cases} a \parallel c \\ b \parallel c \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$$

$$2. \begin{cases} a \parallel (P), a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$$

$$3. \begin{cases} a \subset (P), c \subset (Q) \\ a \parallel c, (P) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$$

$$4. \begin{cases} a \parallel (P), a \parallel (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$$

$$5. \begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ (P) \cap (R) = a \Rightarrow a \parallel b \\ (Q) \cap (R) = b \end{cases}$$

6. Chứng minh ba mặt phẳng cắt nhau theo 3 giao tuyến phân biệt và 3 giao tuyến không đồng qui thì chúng song song nhau.

7. Sử dụng các tính chất hình học phẳng: Đường trung bình, định lí Ta lét, tính chất hình bình hành,...

$$8. \text{Chứng minh } \begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$$

IV. Chứng minh đường thẳng song song mặt phẳng:

$$1. \begin{cases} a \parallel b \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)$$



$$2. \begin{cases} a \subset (Q) \\ (Q) \parallel (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)$$

$$3. \begin{cases} a \perp b \\ b \perp (P) \Rightarrow a \parallel (P) \\ a \not\subset (P) \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} a \perp (Q) \\ (P) \perp (Q) \Rightarrow a \parallel (P) \\ a \not\subset (Q) \end{cases}$$

V. Chứng minh hai mặt phẳng song song:

$$1. \begin{cases} a, b \subset (P), a \cap b = I \\ a \parallel (Q), b \parallel (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \parallel (Q)$$

$$2. \begin{cases} (P) \parallel (R) \\ (Q) \parallel (R) \end{cases} \Rightarrow (P) \parallel (Q)$$

$$3. \begin{cases} (P) \perp a \\ (Q) \perp a \end{cases} \Rightarrow (P) \parallel (Q)$$

VI. Chứng minh hai đường thẳng chéo nhau:

Chứng minh bằng phương pháp phản chứng:

Giả sử a, b không chéo nhau suy ra a và b cùng nằm trong mặt phẳng. Từ các điều kiện đã cho dẫn đến điều trái với giả thiết.



QUAN HỆ VUÔNG GÓC

I. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc:

1. Sử dụng các phương pháp của Hình học phẳng: Góc nội tiếp, định lý Pitago

2. $a \perp b \Leftrightarrow$ góc giữa 2 đường thẳng a, b bằng 90°

3. $a \perp b \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$4. \begin{cases} a \parallel c \\ b \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp b$$



$$5. \begin{cases} a \perp (P) \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$$

$$6. \begin{cases} a \parallel (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$$

7. Áp dụng định lí 3 đường vuông góc: a' là hình chiếu của a lên (P) ,
 $b \subset (P), a \perp b \Leftrightarrow b \perp a'$

II. Chứng minh đường thẳng vuông góc mặt phẳng:

$$1. \begin{cases} a \perp b, a \perp c \\ b, c \subset (P) \\ b \cap c = I \end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$$

$$2. \begin{cases} (Q) \perp (P) \\ (R) \perp (P) \\ (Q) \cap (R) = a \end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$$

$$3. \begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \\ a \subset (Q), a \perp b \end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$$

$$4. \begin{cases} a \parallel b \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$$

$$5. \begin{cases} a \perp (Q) \\ (Q) \parallel (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$$

III. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc:

$$1. \begin{cases} a \perp (P) \\ a \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q)$$

$$2. \begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (Q) \\ a \perp b \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q)$$

3. Chứng minh góc giữa (P) và (Q) bằng 90^0 .



GÓC

1. Góc φ giữa hai đường thẳng a, b :

Từ một điểm O tùy ý dựng $a' \parallel a, b' \parallel b$ (thường chọn O trên a hoặc b) thì φ bằng góc giữa hai đường thẳng a' và b' .

2. Góc φ giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) :

* Nếu a vuông góc với (P) thì $\varphi = 90^\circ$

* Nếu a không vuông góc với (P) thì $\varphi =$ góc giữa a và a' ; trong đó a' là hình chiếu của a lên (P) (Tìm $M = a \cap (P)$, trên a lấy điểm A khác M , H là hình chiếu của A lên (P) thì $\varphi = \widehat{AMH}$)

3. Góc φ giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) :

a) $\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \varphi =$ góc giữa hai đường thẳng a, b .

b) $\begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ (P) \equiv (Q) \end{cases} \Rightarrow \varphi = 0^\circ$

c) Khi $(P) \cap (Q) = d$, trong (P) dựng $a \perp d$, trong (Q) dựng $b \perp d$ thì $\varphi =$ góc giữa hai đường thẳng a, b .

Chú ý:

* Với φ là góc giữa a và b, a và $(P), (P)$ và (Q) thì $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$

* Cho hình chóp $S.ABCD$ có SH là đường cao thì ta có:

- \widehat{SAH} là góc giữa cạnh bên SA với $(ABCD)$.

- M là hình chiếu của S lên AB ta có $MH \perp AB$ nên \widehat{SMH} là góc giữa (SAB) và $(ABCD)$.



KHOẢNG CÁCH

1. Khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a :

H là hình chiếu của O lên đường thẳng a thì $d(O, a) = OH$

2. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (P) :

H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) thì $d(O, (P)) = OH$



3. Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song nhau:

$$\begin{cases} a \parallel (P) \\ O \in a \end{cases} \Rightarrow d(a, (P)) = d(O, (P))$$

4. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$ song song nhau:

$$\begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ O \in (Q) \end{cases} \Rightarrow d((P), (Q)) = d(O, (P))$$

5. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

a) **Đường vuông góc chung:** của hai đường thẳng a, b là đường thẳng c vuông góc với a, b và cắt a, b tại hai điểm A, B . AB gọi là đoạn vuông góc chung của a, b . $d(a, b) = AB$.

b) **Cách dựng:**

- * Dựng (P) chứa b và (P) song song a .
- * Dựng a' là hình chiếu của a lên (P) .
- * Dựng $B = b \cap a'$. Qua B dựng c vuông góc với (P) , c cắt a tại A .

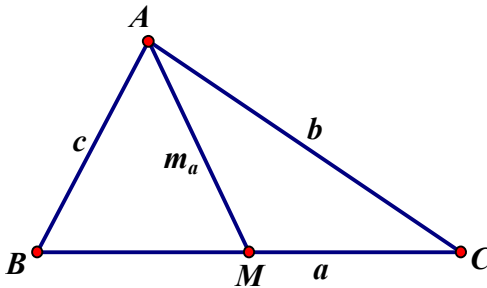
Chú ý: $d(a, b) = d(a, (P))$

Đặc biệt: Khi $a \perp b$

* Qua b dựng $(P) \perp a$, dựng $A = a \cap (P)$, trong (P) dựng c qua A và $c \perp b$, c cắt b tại B .



HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC



1. Định lí cô sin:

Trong tam giác ABC bất kì với $BC = a, CA = b, AB = c$, ta có:



- $a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2a.c.\cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2a.b.\cos C$

Hệ quả:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

@ Áp dụng: Tính độ dài đường trung tuyến của tam giác.

Cho tam giác ABC có các cạnh BC=a, CA=b, AB=c. Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các đường trung tuyến lần lượt vẽ từ các đỉnh A, B, C của tam giác. Ta có:

- $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$
- $m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}$
- $m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$

2. Định lý sin: Trong tam giác ABC bất kì với BC=a, CA=b, AB=c và R là

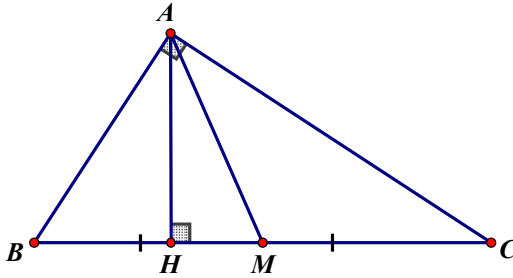
bán kính đường tròn ngoại tiếp, ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

3. Công thức tính diện tích tam giác:

- $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$
 - $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$
 - $S = \frac{abc}{4R}$
 - $S = pr$
 - $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Hê - rông)
- với $p = \frac{a+b+c}{2}$



4. Các hệ thức lượng trong tam giác vuông



* Các hệ thức lượng giác:

$$\sin B = \cos C = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos B = \sin C = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan B = \cot C = \frac{AC}{AB}$$

$$\cot C = \tan B = \frac{AB}{AC}$$

* Các hệ thức về cạnh, đường cao, hình chiếu:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \text{ (Pi ta go)}$$

$$AB.AC = BC.AH = 2.S_{\Delta ABC}$$

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2}$$

$$AB^2 = BH.BC$$

$$AC^2 = CH.BC$$

$$AH^2 = HB.HC$$

$$MA = MB = MC = R$$

