**VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN TẠI MỘT ĐIỂM, ĐI QUA MỘT ĐIỂM**

**A. Phương pháp giải**

Cho đường tròn ( C) có tâm I( a; b); bán kính R và điểm M( x0; y0) :

+ Lập phương trình tiếp tuyến (d) của ( C ) tại điểm M:

Do (d) là tiếp tuyến của đường tròn tại M nên d vuông góc IM

⇒ Đường thẳng ( d) : 

⇒ Phương trình đường thẳng d.

+ Lập phương trình tiếp tuyến (d) của ( C) đi qua M :

- Đường thẳng ( d) : 

⇒ (d): A(x - x0) + B( y - y0) = 0.

- Do đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn ( C) nên d( I; d) = R

⇒ Một phương trình hai ẩn A; B. Giải phương trình ta được A = kB.

- Chọn A= ... ⇒ B=...⇒ Phương trình đường thẳng d.

**B. Ví dụ minh họa**

**Ví dụ 1:**Cho đường tròn (C) : (x - 3)2 + (y - 1)2 = 10. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A( 4; 4) là

**A.**x - 3y + 8 = 0.    **B.**x + 3y – 16 = 0.    **C.**2x - 3y + 5 = 0 .    **D.**x + 3y - 16 = 0.

**Hướng dẫn giải**

Đường tròn (C) có tâm I (3;1). Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm A; khi đó d và IA vuông góc với nhau.

⇒ *IA→* = (1; 3) là vectơ pháp tuyến của d.

Suy ra phương trình d: 1( x - 4) + 3( y - 4 ) = 0

Hay x + 3y - 16 = 0.

**Chọn D.**

**Ví dụ 2 :**Cho đường tròn (x - 3)2 + (y + 1)2 = 5 . Phương trình tiếp tuyến của ( C) song song với đường thẳng d : 2x + y + 7 = 0 là

**A.**2x + y = 0; 2x + y - 10 = 0    **B.**2x + y + 1 = 0 ; 2x + y - 1 = 0

**C.**2x - y + 1 = 0; 2x + y - 10 = 0    **D.**2x + y = 0; x + 2y - 10 = 0

**Hướng dẫn:**

Do tiếp tuyến cần tìm song song với đường thẳng d: 2x + y + 7 = 0 nên

phương trình tiếp tuyến có dạng ∆: 2x + y + m = 0 với m ≠ 7 .

Đường tròn ( C) có tâm I( 3; -1) và bán kính R = √5

Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn ( C) khi :

d( I , ∆) = R ⇔  = √5 ⇔ |5 + m| = 5

⇔ 

Vậy ∆1 : 2x + y = 0 , ∆2 : 2x + y - 10 = 0

**Chọn A.**

**Ví dụ 3.**Viết phương trình tiếp tuyến ∆ của đường tròn ( C): x2 + y2 - 4x - 4y + 4 = 0, biết tiếp tuyến đi qua điểm B( 4; 6) .

**A.**x - 4 = 0 hoặc 3x + 4y - 36 = 0    **B.**x - 4 = 0 hoặc y - 6 = 0.

**C.**y - 6 = 0 hoặc 3x + 4y - 36 = 0    **D.**x - 4 = 0 hoặc 3x - 4y + 12 = 0

**Lời giải**

+ Đường tròn (C) có tâm I( 2; 2) và bán kính R =  = 2

+ Tiếp tuyến ∆: 

⇒ Phương trình ∆: a(x - 4) + b(y - 6) = 0 hay ax + by - 4a - 6b = 0 (\*)

+ Do ∆ là tiếp tuyến của đường tròn ( C) nên d(I; ∆) = R

⇔  = 2 ⇔|- 2a - 4b| = 2

⇔ |a + 2b| =  ⇔ a2 + 4ab + 4b2 = a2 + b2

⇔ 4ab + 3b2 = 0 ⇔ 

+ Nếu b = 0; chọn a = 1 thay vào (\*) ta được ∆: x - 4 = 0.

+ Nếu 4a = - 3b ta chọn a = 3 thì b = -4 thay vào ( \*) ta được: 3x - 4y + 12 = 0

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn là x - 4 = 0 và 3x - 4y + 12 = 0 .

**Chọn D.**

**Ví dụ 4.**Phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C): (x + 2)2 + (y + 2)2 = 25 tại điểm M(2; 1) là:

**A.**d: -y + 1 = 0    **B.**d: 4x + 3y + 14 = 0

**C.**d: 3x - 4y - 2 = 0    **D.**d: 4x + 3y - 11 = 0

**Lời giải**

+ Đường tròn ( C) có tâm I(-2; -2) và bán kính R= 5.

+ Do đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn taị điểm M nên hai đường thẳng d và IM vuông góc với nhau.

+ Đường thẳng d: 

⇒Phương trình (d) : 4( x - 2) + 3( y - 1) = 0 hay 4x + 3y - 11 = 0

**Chọn D.**

**Ví dụ 5.**Cho đường tròn ( C): (x-1)2 + (y + 2)2 = 2. Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm A(3; -4) .

**A.**d: x + y + 1 = 0    **B.**d: x - 2y - 11 = 0

**C.**d: x - y - 7 = 0    **D.**d: x - y + 7 = 0

**Lời giải**

+ Đường tròn ( C) có tâm I( 1; -2) .

+ Do đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn tại điểm A(3; -4) nên đường thẳng d vuông góc với đường thẳng IA.

+ Phương trình đường thẳng (d): 

⇒ phương trình (d) là: 2( x - 3) – 2( y + 4) = 0

⇔ (d) : 2x - 2y - 14 = 0 hay x - y - 7 = 0

**Chọn C.**

**Ví dụ 6.**Cho đường tròn (C): (x + 1)2 + (y - 1)2 = 25 và điểm M(9; -4) . Gọi ∆ là tiếp tuyến của ( C) , biết ∆ đi qua M và không song song với các trục tọa độ. Khi đó khoảng cách từ điểm P(6; 5) đến ∆ bằng:

**A.**2    **B.**3    **C.**4    **D.**5

**Lời giải**

+ Đường tròn (C) có tâm I(-1; 1)và bán kính R= 5.

+ Tiếp tuyến ∆: 

⇒ Phương trình ∆: a(x - 9) + b(y + 4) = 0 hay ax + by – 9a + 4b = 0 (\*)

+ Do ∆ là tiếp tuyến của đường tròn ( C) nên d(I; ∆) = R

⇔  = 5 ⇔ |-10a + 5b| = 5

⇔ |-2a + b| = 

⇔ 4a2 - 4ab + b2 = a2 + b2 ⇔ 3a2 - 4ab = 0

⇔ 

+ Nếu a = 0 chọn b = 1 thay vào (\*) ta được: y + 4 = 0 ( loại) vì tiếp tuyến không song song với các trục tọa độ.

+ Nếu 3a = 4b, chọn a = 4 thì b = 3 ta được ∆: 4x + 3y - 24 = 0

⇒ Khoảng cách từ P(6;5) đến đường thẳng ∆ là:

d(P, ∆) = $\frac{\left|24+15-24\right|}{2}$ = 3

**Chọn B.**

**Ví dụ 7.** Có bao nhiêu đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và tiếp xúc với đường tròn
(C): x2 + y2 - 2x + 4y - 11 = 0?

**A.**0.    **B.**2.    **C.**1.    **D.**3.

**Lời giải**

Đường tròn (C) có tâm I(1; -2) và bán kính R =  = 4.

Độ dài OI =  = √5

⇒ Điểm O nằm trong đường tròn nên không có tiếp tuyến nào của đường tròn kẻ từ O.

**Chọn A.**

**Ví dụ 8.**Cho đường tròn (C): (x-3)2 + (y + 3)2 = 1. Qua điểm M(4; -3) có thể kẻ được bao nhiêu đường thẳng tiếp xúc với đường tròn ( C) ?

**A.**0.    **B.**1.    **C.**2.    **D.**Vô số.

**Lời giải**

Thay tọa độ điểm M vào phương trình đường tròn( C) ta được :

( 4 - 3)2 + (-3 + 3)2 = 1

⇒ Điểm M thuộc (C).

⇒ có đúng 1 tiếp tuyến của đường tròn kẻ từ M.

**Chọn B.**

**Ví dụ 9.** Có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm N(-2; 0) tiếp xúc với đường tròn
(C): (x - 2)2 + (y + 3)2 = 4?

**A.**0.    **B.**1.    **C.**2.    **D.**Vô số.

**Lời giải**

Đường tròn ( C) có tâm I(2; -3) và bán kính R = 2.

Độ dài IN =  = 5 > R

⇒ Điểm N nằm ngoài đường tròn ( C) nên qua điểm N kẻ được hai tiếp tuyến đến đường tròn (C).

**Ví dụ 10.**Viết phương trình tiếp tuyến ∆ của đường tròn (C):(x - 1)2 + (y+2)2 = 8, biết tiếp tuyến đi qua điểm A( 5; -2).

**A.**x - 5 = 0 .    **B.**x + y - 3 = 0 hoặc x – y - 7 = 0.

**C.**x- 5= 0 hoặc x + y - 3 = 0 .    **D.**y + 2 = 0 hoặc x - y - 7 = 0 .

**Lời giải**

+ Đường tròn (C) có tâm I(1; -2) và bán kính R = 2√2

+ Tiếp tuyến ∆:

 

⇒ Phương trình ∆: a( x - 5) + b(y + 2) = 0 hay ax + by - 5a + 2b = 0.

+ Do ∆ là tiếp tuyến của đường tròn ( C) nên d(I; ∆) = R

⇔  = 2√2 ⇔ |- 4a| = 2√2.

⇔ 16a2 = 8( a2 + b2 ) ⇔ 8a2 = 8b2

⇔ 

+ Nếu a = b; ta chọn a = 1 ⇒ b = 1. Khi đó phương trình tiếp tuyến ∆: x + y - 3 = 0

+ Nếu a = - b; chọn a = 1 thì b = - 1. Khi đó phương trình tiếp tuyến ∆: x - y - 7 = 0.

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn là x + y - 3 = 0 và x - y - 7 = 0

**Chọn B.**

**Ví dụ 11:** Cho đường tròn ( C) có tâm I(1; 3), bán kính R= √52. Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại điểm M biết điểm M thuộc đường thẳng d:  và tọa độ M nguyên?

**A.**x + 2y + 3 = 0    **B.**2x + 5y + 21 = 0

**C.**2x - 3y - 19 = 0    **D.**Đáp án khác

**Lời giải**

+ Do điểm M thuộc đường thẳng d nên tọa độ M(3 + 2t; 1 - 4t).

+ Do điểm M thuộc đường tròn nên IM = R

⇔ IM2 = R2 ⇔ ( 2 + 2t)2 + ( 2 + 4t)2 = 52

⇔ 4t2 + 8t + 4 + 16t2 + 16t + 4 = 52

⇔ 20t2 + 24t – 44 = 0 ⇔ t = 1 hoặc t = $\frac{-11}{ 5}$ ( loại) .

+ Với t = 1 thì tọa độ M(5; -3) .

⇒ Phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại điểm M (5; -3):

(∆) : 

⇒ Phương trình tiếp tuyến : 2( x - 5) – 3(y + 3) = 0 hay 2x - 3y - 19 = 0

**Chọn C.**

1. C. Bài tập vận dụng

**Câu 1:** Phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C): x2 + y2 - 3x-y= 0 tại điểm N(1;-1) là:

**A.**d: x + 3y - 2 = 0    **B.**d: x - 3y + 4 = 0

**C.**d: x - 3y - 4 = 0    **D.**d: x + 3y + 2 = 0

**Đáp án: D**

**Trả lời:**

+ Đường tròn (C) có tâm I( $\frac{3}{2}$ ; $\frac{1}{2}$ ).

+ Do đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn ( C) tại điểm N nên đường thẳng d vuông góc với đường thẳng IN.

+ Phương trình đường thẳng (d) : 

⇒(d): 1(x - 1) + 3( y + 1) = 0 hay ( d): x + 3y + 2 = 0

**Câu 2:** Cho đường tròn( C): x2 + y2 - 2x + 8y - 23 = 0 và điểm M( 8; -3) . Độ dài đoạn tiếp tuyến của ( C) xuất phát từ M là :

**A.**10    **B.**2√10    **C.**    **D.**√10

**Đáp án: D**

**Trả lời:**

Đường tròn ( C) có tâm I( 1; -4) bán kính R = √40 .

Độ dài IM =  = √50 > R

⇒ Điểm M nằm ngoài đường tròn. Khi đó từ M sẽ kẻ được hai tiếp tuyến là MA và MB- trong đó A và B là hai tiếp điểm .

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

MA = MB =  = √10

Vậy độ dài tiếp tuyến là : √10.

**Câu 3:** Cho đường tròn ( C ) : x2 + y2 - 3x - y = 0. Phương trình tiếp tuyến của ( C) tại M(1 ; -1) là:

**A.**x + 3y - 1 = 0    **B.**2x - 3y + 1 = 0    **C.**2x - y + 4 = 0    **D.**x + 3y + 2 = 0

**Đáp án: D**

**Trả lời:**

Đường tròn ( C) có tâm I( $\frac{3}{2}$ ;$ \frac{1}{2}$  ).

Điểm M(1; -1) thuộc đường tròn (C).

Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm M là đường thẳng đi qua M và nhận vec tơ $\vec{IM}$ = (- $\frac{1}{2}$ ; - $\frac{3}{2}$ ) = - $\frac{1}{2}$ (1; 3) nên có phương trình:

1( x - 1) + 3( y + 1) = 0 hay x + 3y + 2 = 0

**Câu 4:** Cho đường tròn (x - 3)2 + (y - 1)2 = 10 . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A( 4; 4) là

**A.**x - 3y + 5 = 0    **B.**x + 3y - 4 = 0    **C.**x - 3y + 16 = 0    **D.**x + 3y - 16 = 0

**Đáp án: D**

**Trả lời:**

Đường tròn ( C) có tâm I(3; 1) và bán kính R = √10.

Tiếp tuyến của ( C) tại A là đường thẳng qua A( 4; 4) và nhận vecto *IA→*( 1; 3) là vectơ pháp tuyến của tiếp tuyến d.

Suy ra (d) : 1( x - 4) + 3( y - 4) = 0 hay x + 3y - 16 = 0

**Câu 5:** Cho đường tròn (x - 2)2 + (y - 2)2 = 9 . Phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm A( 5; -1) là

**A.**x + y - 4 = 0 và x - y - 2 = 0 .    **B.**x = 5 và y = -1.

**C.**2x - y - 3 = 0 và 3x + 2y - 3 = 0.    **D.**3x - 2y + 1 = 0 và 2x + 3y + 5 = 0

**Đáp án: B**

**Trả lời:**

+ Đường tròn (C) có tâm I( 2; 2) và bán kính R = 3.

+ ∆ là tiếp tuyến cần tìm : đi qua A(5, -1) và nhận VTPT $\vec{n}$ ( A; B)

⇒ (∆ ) : A( x - 5) + B( y + 1) = 0 (\*)

+ Do ∆ là tiếp tuyến của ( C) nên :

d( I ; ∆) = R ⇔  = 3

⇔ |-3A + 3B| = 3 ⇔ 9A2 - 18AB + 9B2 = 9A2 + 9B2

⇔ 18AB = 0 ⇔ 

+ Với A =0 ; chọn B = 1 thay vào (\*) ta được : y + 1 = 0

+ Với B = 0 ; chọn A = 1 thay vào ( \*) ta được :x - 5 = 0

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn là y + 1 = 0 và x - 5 = 0

**Câu 6:** Cho đường tròn (C): x2 + y2 + 2x - 6y + 5 = 0 . Phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng d: x + 2y - 15 = 0 là

**A.**x + 2y = 0 và x + 2y - 10 = 0.    **B.**x - 2y = 0 và x - 2y + 10 = 0.

**C.**x + 2y - 12 = 0 và x + 2y + 22 = 0    **D.**x + 2y + 3 = 0 và x + 2y + 7 = 0

**Đáp án: A**

**Trả lời:**

+ Đường tròn ( C) có tâm I( -1;3) và bán kính R =  = √5

+ Do tiếp tuyến cần tìm song song với đường thẳng d: x + 2y- 15= 0 nên tiếp tuyến ∆ có dạng : x + 2y + m= 0 ( m≠-15) .

+ ∆ là tiếp tuyến của ( C) khi và chỉ khi:

d(I ;∆) = R ⇔  = √5 ⇔ |m + 5| = 5

⇔ 

⇒ Có hai tiếp tuyến thỏa mãn là : x + 2y = 0 và x + 2y - 10 = 0

**Câu 7:** Đường tròn ( C) có tâm I ( -1; 3) và tiếp xúc với đường thẳng d: 3x - 4y + 5 = 0 tại điểm H có tọa độ là

**A.**( -  ; -  )    **B.**( ;  )    **C.**( ; -  )    **D.**( -  ;  )

**Đáp án: B**

**Trả lời:**

Do đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn ( C) tại điểm H nên IH vuông góc với đường thẳng d.

⇒ Đường thẳng IH: 

⇒ Phương trình IH: 4( x + 1) + 3( y - 3) = 0 hay 4x + 3y - 5 = 0.

Do đường thẳng d và đường thẳng IH cắt nhau taị điểm H nên tọa độ điểm H là nghiệm hệ phương trình:



**Câu 8:** Cho đường tròn (C) : x2 + y2 - 6x + 2y + 5 = 0 và đường thẳng
d: 2x + (m - 2)y – m - 7 = 0. Với giá trị nào của m thì d là tiếp tuyến của (C) ?

**A.**m = 3    **B.**m = 15    **C.**m = 13    **D.**m = 3 hoặc m = 13.

**Đáp án: D**

**Trả lời:**

+ đường tròn (C) có tâm I( 3 ;-1) và bán kính .

+ d là tiếp tuyến của (C) khi va chỉ khi:

d(I, d) = R ⇔  = √5 ⇔ |1 - 2m| = √5.

→ m2 - 16m + 39 = 0 ⇔ 

**Câu 9:** Cho đường tròn ( C) có tâm I(-1; 2), bán kính R = √29. Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại điểm M biết điểm M thuộc đường thẳng d:  và tọa độ M nguyên?

**A.**x + 2y + 3 = 0    **B.**2x + 5y + 21 = 0

**C.**3x + 5y - 8 = 0    **D.**Đáp án khác

**Đáp án: B**

**Trả lời:**

+ Do điểm M thuộc đường thẳng d nên tọa độ M(-2 + t; 3t).

+ Do điểm M thuộc đường tròn nên IM = R

⇔ IM2 = R2 ⇔ ( t- 1)2 + ( 3t - 2)2 = 29

⇔ t2 - 2t + 1 + 9t2 - 12t + 4 = 29

⇔ 10t2 – 14t – 24 = 0 ⇔ t = - 1 hoặc t = $\frac{12}{5}$ ( loại) .

+ Với t = - 1 thì tọa độ M( - 3; - 3) .

⇒ Phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại điểm M ( -3; -3):

(∆) : 

⇒ Phương trình tiếp tuyến : 2( x + 3) + 5( y + 3) = 0 hay 2x + 5y + 21 = 0 .