# CHỦ ĐỀ 8: DÃY SỐ

## Dạng toán 1: XÁC ĐỊNH SỐ HẠNG

***Định nghĩa dãy số***

*Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $N^*$ được gọi là một dãy số vô hạn hay dãy số. Kí hiệu dãy số $u=u(n)$ bởi $(u_n)$ và gọi là $u_n$ là số hạng tổng quát của dãy số đó.*

*Dãy số $(u_n)$ viết dưới dạng khai triển: $u_1,u_2,...,u_n,...$*

***Ba cách cho một dãy số***

*- Cho dãy số bởi công thức của số hạng tổng quát $u_n$.*

*- Cho dãy số bởi hệ thức truy hồi hay bằng quy nạp $u_1$ và $u_{n+1}$ theo $u_n$; $u_1,u_2$ và $u_{n+2}$ theo $u_n,u_{n+1},...$*

*- Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số.*

***Xác định số hạng của dãy số***

*- Nếu dãy số cho bởi công thức số hạng tổng quát thì để tính số hạng $u_k$ ta chỉ cần thay $n=k$ vào $u_n$.*

*- Nếu dãy số cho bởi hệ thức truy hồi thì ta tính liên tiếp $u_1,u_2,\cdots$ cho đến số hạng $u_k$ cần tính.*

*- Nếu dãy số cho bởi cách diễn đạt bằng lời thì dựa vào cách mô tả đó để tính $u_k$ hoặc tính dần đến $u_k$.*

***Xác định số hạng tổng quát của dãy truy hồi***

*- Dạng $u_{n+1}=u_n+d$, d hằng số thì tính dần đến số hạng đầu.*

*- Dạng $u_{n+1}=q.u_n$, q hằng số thì tính dần đến số hạng đầu.*

*- Dạng $u_{n+1}=u_n+f(n)$ thì đặt dãy phụ $x_n=u_{n+1}-u_n$*

*hoặc viết liên tiếp $u_n=(u_n-u_{n-1})+(u_{n-1}-u_{n-2})+...+(u_2-u_1)+u_1$*

*hoặc cộng n đẳng thức từ $n=1,2,...$ đến n để tính.*

*- Dạng $u_{n+1}=au_n+b$ với $a\neq 0$, đặt dãy phụ $u_n=v_n+c$*

*thì được $v_{n+1}=a.v_n+(ac+b-c)$, ta chọn hằng số c sao cho $ac+b-c=0$ thì được $v_{n+1}=av_n$ trở về dạng thứ nhất.*

***Chú ý:***

*1) Bài toán yêu cầu chứng minh công thức số hạng tổng quát thì ta dùng phương pháp quy nạp để chứng minh.*

*2) Nếu dãy cho bởi cách diễn đạt bằng lời thì xác lập các đại lượng và quan hệ giữa các số hạng liên tiếp nhau.*

*3) Sử dụng các tổng đại số của phần quy nạp, các biến đổi rút gọn và đại lượng của cung góc lượng giác.*

**Bài toán 1.** Tìm 5 số hạng đầu của dãy:

a) $u_n=\dfrac{2n^2-3}{n}$

b) $v_n=\sin^2\dfrac{n\pi}{4}+\cos\dfrac{2n\pi}{3}$

***Giải***

a) Thế $n=1$ thì $u_1=-1, n=2$ thì $u_2=\dfrac{5}{2}, n=3$ thì $u_3=5$.

$n=4$ thì $u_4=\dfrac{29}{4}, n=5$ thì $u_5=\dfrac{47}{5}$.

b) Thế $n=1$ thì $v_1=\sin^2\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$

$n=2$ thì $v_2=\sin^2\dfrac{\pi}{2}+\cos\dfrac{4\pi}{3}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$n=3$ thì $v_3=\sin^2\dfrac{3\pi}{4}+\cos 2\pi=\dfrac{3}{2}$

$n=4$ thì $v_4=\sin^2\pi+\cos\dfrac{8\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$

$n=5$ thì $v_5=\sin^2\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{10\pi}{3}=0$

**Bài toán 2.** Tìm 5 số hạng đầu của mỗi dãy số sau:

a) $u_1=0$ và $u_n=\frac{2}{u^2_{n-1}+1}$, với mọi $n\ge 2$.

b) $u_1=1,u_2=-2$ và $u_n=u_{n-1}-2u_{n-2}$ với mọi $n\ge 3$.

***Giải***

a) Ta có $u_1=0$ và $n\ge 2$, $u_n=\frac{2}{u^2_{n-1}+1}\Rightarrow u_2=\frac{2}{u_1^2+1}=2$

$u_3=\frac{2}{u_2^2+1}=\frac{2}{5};\ u_4=\frac{2}{u_3^2+1}=\frac{50}{29};\ u_5=\frac{2}{u_4^2+1}=\frac{1682}{3341}$

b) Ta có $u_1=1,u_2=-2$ và $n\ge 3$; $u_n=u_{n-1}-2u_{n-2}$

Do đó $u_3=u_2-2u_1=-2-2=-4,\ u_4=u_3-2u_2=-4+4=0$

$u_5=u_4-2u_3=0+8=8$.

**Bài toán 3.** Tìm 6 số hạng đầu của dãy các đôi thỏ trong tháng thứ n, theo quy luật: "Một đôi thỏ gồm một thỏ đực và một thỏ cái cứ mỗi tháng đẻ được một đôi thỏ con cũng gồm một thỏ đực và một thỏ cái; mỗi đôi thỏ con, khi tròn hai tháng tuổi, lại mỗi tháng đẻ ra một đôi thỏ con, và quá trình sinh nở cứ thế tiếp diễn".

***Giải***

Gọi $F_n$ là dãy các đôi thỏ trong tháng thứ n.

Tháng 1 có $F_1=1$.

Tháng 2, đôi thỏ chưa đẻ con nên có $F_2=1$.

Tháng 3, đôi thỏ bắt đầu đẻ con nên có $F_3=1+1=2$.

Tháng 4, đôi thỏ tiếp tục đẻ con nên có $F_4=2+1=3$.

Tháng 5, đôi thỏ tiếp tục đẻ con và đôi thỏ con đầu tiên bắt đầu đẻ con nên có $F_5=3+1+1=5$.

Tháng 6, đôi thỏ tiếp tục đẻ con và hai đôi thỏ con đầu tiên cũng đẻ con nên có $F_6=5+1+1+1=8$.

**Bài toán 4.** Xác định số hạng tổng quát của dãy số:

a) $u_1=\frac{1}{1.2};u_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$

b) $v_1=1-\frac{1}{2};v_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)...\left(1-\frac{1}{n}\right)$

***Giải***

a) $u_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

b) $v_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)...\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}...\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$

**Bài toán 5.** Xác định số hạng tổng quát của dãy số:

a) $u_1=5,u_n=u_{n-1}+3,n\ge 2$

b) $v_1=4,v_n=5v_{n-1},n\ge 2$

***Giải***

a) Với $n\ge 2: u_n=u_{n-1}+3$ nên:

$u_n=u_{n-1}+3=(u_{n-2}+3)+3=u_{n-2}+2.3=(u_{n-3}+3)+2.3$

$=u_{n-3}+3.3=...=u_1+(n-1)3=5+(n-1)3=3n+2$

b) Với $n \geq 2, v_n = 5v_{n-1}$ nên:

$$v_n = 5v_{n-1} = 5(5v_{n-2}) = 5^2.v_{n-2} = 5^2(5v_{n-3}) = 5^3 v_{n-3} = ...$$
$$= 5^{n-1}.v_1 = 5^{n-1}.4 = 4.5^{n-1}$$

**Bài toán 6.** Xác định số hạng tổng quát của dãy:

a) $u_1 = 2, u_{n+1} = u_n + n; n \geq 1$

b) $v_1 = 5, v_{n+1}.v_n = 1, n \geq 1$

***Giải***

a) Với $n \geq 1: u_{n+1} = u_n + n$ nên:

$$u_n = u_{n-1} + (n-1) = (u_{n-2} + n - 2) + (n-1)$$
$$= (u_{n-3} + n - 3) + (n-2) + (n-1) = ...$$
$$= (u_1 + 1) + ... + (n-2) + (n-1)$$
$$= 2 + (1 + 2 + ...(n-1)) = 1 + (1 + 2 + 3 + ... + n)$$
$$= 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

b) Với $n \geq 1: v_{n+1}.v_n = 1 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{v_1} = \frac{1}{5}, v_3 = \frac{1}{v_2} = 5,$

$$v_4 = \frac{1}{v_3} = \frac{1}{5}, v_5 = \frac{1}{v_4} = 5, v_5 = \frac{1}{v_5} = \frac{1}{5}, ...$$

Tổng quát, ta có $v_n = \begin{cases} 5 \text{ khi } n = 2k+1 \\ \frac{1}{5} \text{ khi } n = 2k \end{cases}$

**Bài toán 7.** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = 2u_{n-1} + 3$ với mọi $n \geq 2$. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$ ta có $u_n = 2^{n+1} - 3$.

***Giải***

Ta chứng minh quy nạp: $u_n = 2^{n+1} - 3, n \geq 1$ (1)

Khi $n = 1$, ta có $u_1 = 1 = 2^{1+1} - 3$. Do đó (1) đúng khi $n = 1$.

Giả sử (1) đúng khi $n = k, k \in N^*, u_k = 2^{+1} - 3$.

Ta sẽ chứng minh (1) cũng đúng khi $n = k + 1$.

Thật vậy, từ công thức xác định dãy số $(u_n)$ và giả thiết quy nạp ta có:

$u_{k+1} = 2u_k + 3 = 2.(2^{k+1} - 3) + 3 = 2^{(k+1)+1} - 3$: đpcm.

Vậy (1) đúng với mọi $n \in N^*$.

**Bài toán 8.** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi: $u_1 = 2; u_n = \frac{u_{n-1} + 1}{2}, n \geq 2$.

Chứng minh: $u_n = \frac{2^{n-1} + 1}{2^{n-1}}$ với mọi $n \geq 1$. (*)

***Giải***

Ta chứng minh quy nạp:

Khi $n = 1$, ta có $u_1 = \frac{2^0 + 1}{2^0} = \frac{1+1}{1} = 2$. Do đó (*) đúng khi $n = 1$.

Giả sử (*) đúng khi $n = k, k \in N^*, u_k = \frac{2^{k-1} + 1}{2^{k-1}}$.

Ta sẽ chứng minh (*) cũng đúng khi $n = k + 1$.

Thật vậy, từ công thức xác định dãy số $(u_n)$ và giả thiết quy nạp ta có:

$$u_{k+1}=\frac{u_k+1}{2}=\frac{\frac{2^{k-1}+1}{2^{k-1}}+1}{2}=\frac{2.2^{k-1}+1}{2^k}=\frac{2^k+1}{2^k}$$ : đpcm.

Vậy (*) đúng với mọi $n\in N^*$.

**Bài toán 9.** Xác định số hạng tổng quát của dãy số:

$u_1=\sqrt{2}, u_n=\sqrt{2+\sqrt{2++\sqrt{...+\sqrt{2}}}}$ ( n dấu căn)

***Giải***

Ta có $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sqrt{2}=u_1=2\cos\frac{\pi}{4}=2\cos\frac{\pi}{2^2}$

và $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$

$\Rightarrow\sqrt{2+\sqrt{2}}=u_2=2\cos\frac{\pi}{8}=2\cos\frac{\pi}{2^3}$

Ta chứng minh quy nạp: $u_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

**Bài toán 10.** Xác định số hạng tổng quát của dãy số:

$u_1=2, u_2=5, u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n, n\ge 1$

***Giải***

$u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n\Rightarrow u_{n+2}-u_{n+1}=5\left(u_{n+1}-u_n\right)$

Đặt $x_n=u_n-u_{n-1}$ thì $x_{n+1}=5x_n$.

Do đó $x_n=5x_{n-1}=5\left(5x_{n-2}\right)=5^2.x_{n-2}=5^2\left(5x_{n-3}\right)=5^3.x_{n-3}=...$

$=5^{n-2}.x_2=5^{n-2}\left(u_2-u_1\right)=3.5^{n-2}$

Ta có $u_n=\left(u_n-u_{n-1}\right)+\left(u_{n-1}-u_{n-2}\right)+...+\left(u_2-u_1\right)+u_1$

$=3.5^{n-2}+3.5^{n-3}+...+3.5^0+2$

$=2+3\left(1+5+5^2+...+5^{n-2}\right)=2+3\frac{1-5^{n-1}}{1-5}=\frac{3.5^{n-1}+5}{4}$

**Bài toán 11.** Xác định số hạng tổng quát của dãy số Fibônaxi:

$F_1=1, F_2=1, F_{n+2}=F_n+F_{n+1}, n\ge 1$

***Giải***

Xét 2 số $a>b$ sao cho $a+b=1, ab=-1$, thì a, b là nghiệm phương trình

$x^2-x+1=0$ nên $a,b=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Do đó $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}=-abF_n+\left(a+b\right)F_{n+1}$

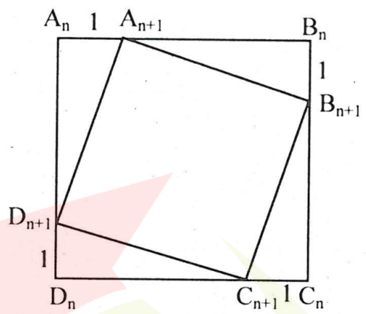
$\Rightarrow F_{n+2}-aF_{n+1}=b\left(F_{n+1}-aF_n\right)$. Đặt $v_n=F_{n+1}-aF_n$ thì $v_{n+1}=bv_n$.

Từ đó tính được $v_n$ rồi suy ra: $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

**Bài toán 12.** Từ hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 6cm, dựng các hình vuông $A_2B_2C_2D_2, A_3B_3C_3D_3,..., A_nB_nC_nD_n,...$ theo cách sau: Với mỗi $n=2,3,4,...$ lấy các điểm $A_n, B_n, C_n$ và $D_n$ tương ứng trên các cạnh $A_{n-1}B_{n-1}, B_{n-1}C_{n-1}, C_{n-1}D_{n-1}$ và $D_{n-1}A_{n-1}$ sao cho $A_{n-1}A_n=1cm$ và $A_nB_nC_nD_n$ là một hình vuông. Lập dãy số $(u_n)$ với $u_n$ là độ dài cạnh của hình vuông $A_nB_nC_nD_n$ bởi hệ thức truy hồi.

***Giải***

Với mỗi n nguyên dương, xét hai hình vuông $A_nB_nC_nD_n$ cạnh $u_n$ và $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ cạnh $u_{n+1}$.




Ta có: $u_{n+1} = A_{n+1}B_{n+1}$

$$= \sqrt{\left(A_{n+1}B_n\right)^2 + \left(B_nB_{n+1}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(A_nB_n - 1\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\left(u_n - 1\right)^2 + 1}$$

Vậy $u_1 = 6, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 2}, n \geq 1$.

**Bài toán 13.** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi:

$$u_1 = 3, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 9}{6}, n \geq 1$$

a) Tính $u_2, u_4, u_6$.

b) Chứng minh rằng $(u_n)$ là một dãy số không đổi.

***Giải***

a) $u_1 = 3, u_2 = \dfrac{u_1^2 + 9}{6} = \dfrac{18}{6}, u_3 = \dfrac{u_2^2 + 9}{6} = 3$

Vậy $u_2 = u_4 = u_6 = 3$.

b) Ta chứng minh quy nạp: $u_n = 3, n \geq 1$

Khi $n = 1$ thì $u_1 = 3$: đúng

Giả sử $u_k = 3 \Rightarrow u_{k+1} = \dfrac{u_1^2 + 9}{6} = \dfrac{18}{6} = 3$ : đpcm.

Vậy dãy số không đổi.

**Bài toán 14.** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi:

$u_1 = 4$ và $u_{n-1} = 2\sqrt{3u_n - 8}$, với mọi $n \geq 1$.

Chứng minh rằng $(u_n)$ là một dãy số không đổi.

***Giải***

Ta có: $u_1 = 4, u_2 = 2\sqrt{12 - 8} = 4, u_3 = 2\sqrt{12 - 8} = 4$

Ta chứng minh quy nạp: $u_n = 4, n \geq 1$ (1)

Giả sử (1) đúng khi $n = k$, k nguyên dương: $u_k = 4$.

Ta chứng minh (1) đúng khi $n = k + 1$.

Thật vậy: $u_{k+1} = 2\sqrt{3u_k - 8} = 2\sqrt{3.4 - 8} = 4$: đpcm.

Vậy $u_n = 4$ với mọi n nguyên dương.

## Dạng toán 2: TÍNH CHẤT TĂNG GIẢM

*- Dãy số $(u_n)$ được gọi là dãy số tăng nếu với mọi n ta có $u_n < u_{n+1}$.*

*- Dãy số $(u_n)$ được gọi là dãy số giảm nếu với mọi n ta có $u_n > u_{n+1}$.*

***Phương pháp xét tính tăng, giảm của dãy số $u_n$***

*- Tính $u_{n+1}$.*

*- So sánh với $u_n$ bằng cách lập hiệu số $u_{n+1} - u_n$, so với số 0 hoặc tỉ số $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ so với số 1.*

***Chú ý:***

*1) Biến đổi, tính gọn, nhân chia lượng liên hiệp, chia tách trước.*

*2) Xem xét dãy luôn luôn dương, dãy luôn luôn âm, dãy đan dấu.*

*Nếu có $u_1 > u_2, u_2 < u_3$ thì dãy không có tính tăng và giảm.*

*3) Sử dụng phương pháp quy nạp.*

**Bài toán 1.** Xét tính tăng, giảm của dãy số:

a) $u_n = n^3 - 3n^2 + 5n - 7$ b) $u_n = \frac{5n-1}{2n+3}$

***Giải***

a) Ta có: $u_n = n^3 - 3n^2 + 5n - 7$ nên

$u_{n+1} = (n+1)^3 - 3(n+1)^2 + 5(n+1) - 7 = n^3 + 2n - 4$

Lập hiệu $u_{n+1} - u_n = 3n^2 + 3n + 3 = 3n(n-1) + 3 > 0, \forall n \ge 1$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \ge 1$. Vậy dãy số tăng.

b) Ta có $u_n = \frac{5n-1}{2n+3}$ nên $u_{n+1} = \frac{5(n+1)-1}{2(n+1)+3} = \frac{5n+4}{2n+5}$

Lập hiệu $u_{n+1} - u_n = -\frac{5n+4}{2n+5} - \frac{5n-1}{2n+3} = \frac{17}{(2n+3)(2n+5)} > 0, \forall n \ge 1$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \ge 1$.

Vậy dãy số tăng.

**Bài toán 2.** Xét tính tăng, giảm của dãy số:

a) $u_n = (-1)^n \frac{n}{n+5}$ b) $u_1 = 9, u_{n+1} = u_n - 2 + \sin n, n \ge 1$

***Giải***

a) Ta có $u_1 = -\frac{1}{6}, u_2 = \frac{2}{7}, u_3 = -\frac{3}{8}$

Vì $u_1 < u_2, u_2 > u_3$ nên hằng số không tăng, không giảm.

b) Ta có $u_{n+1} = u_n - 2 + \sin n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \sin n - 2 < 0, \forall n$ (vì $\sin n \le 1, \forall n$).

Vậy dãy số giảm.

**Bài toán 3.** Xét tính tăng, giảm của dãy số:

a) $x_n = \frac{n+1}{3^n}$ b) $y_n = \frac{2^n}{(n+1)!}$

***Giải***

a) Ta có: $x_n = \frac{n+1}{3^n}$ nên $x_{n+1} = \frac{n+2}{3^{n+1}}$

Lập tỉ số $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+2}{3^{n+1}} : \frac{n+1}{3^n} = \frac{n+2}{3(n+1)} = \frac{n+2}{3n+3} < 1, \forall n \ge 1$

Vì $x_n > 0$ với mọi n $\Rightarrow x_{n+1} < x_n, \forall n \ge 1$. Vậy dãy số giảm.

b) Ta có: $y_n = \frac{2^n}{(n+1)!}$ nên $y_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$

Lập tỉ số $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} : \frac{2^n}{(n+1)!} = \frac{2}{n+2} < 1, \forall n \ge 1$

Vì $x_n > 0$ với mọi n $\Rightarrow y_{n+1} < y_n, \forall n \ge 1$. Vậy dãy số giảm.

**Bài toán 4.** Xét tính tăng, giảm của dãy số:

a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ b) $b_n = \frac{2-n}{\sqrt{n}}$

***Giải***

a) Nhân lượng liên hiệp thì có:

$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = a_n, \forall n \ge 1$. Vậy dãy số giảm.

b) Ta có $b_n = \dfrac{2-n}{\sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$

Do đó $b_{n+1} = \dfrac{2}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1}$

Lập hiệu số: $b_{n+1} - b_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) + \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) < 0, \forall n \ge 1$

$\Rightarrow b_{n+1} < b_n, \forall n \ge 1$. Vậy dãy số giảm.

**Bài toán 5.** Xét tính tăng, giảm của dãy số $(u_n)$ xác định bởi:

$u_1 = 1, u_{n+1} = 3u_n + 10, n \ge 1$

***Giải***

Ta chứng minh quy nạp: $u_{n+1} > u_n, n \ge 1$ (1)

Khi $n=1$ thì $u_2 = 3.1 + 10 = 13 > u_1 = 1$.

Do đó (1) đúng khi $n = 1$.

Giả sử (1) đúng khi $n = k$, k nguyên dương.

Ta chứng minh (1) đúng khi $n = k+1$.Thật vậy:

$u_{k+1} > u_k \Rightarrow 3u_{k+1} + 10 > 3u_k + 10 \Rightarrow u_{k+2} > u_{k+1}$: đpcm.

Vậy dãy số tăng.

**Bài toán 6.** Xét tính tăng, giảm của dãy số:

$u_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{3}}}}$, n dấu căn.

***Giải***

Ta chứng minh quy nạp: $u_{n+1} > u_n, \forall n \ge 1$ (1)

Khi $n=1$ thì $u_2 > u_1 \Leftrightarrow \sqrt{3+\sqrt{3}} > \sqrt{3}$: đúng.

Do đó (1) đúng khi $n = 1$. Giả sử (1) đúng khi $n = k$, k nguyên dương:

$u_{n+1} > u_k \Rightarrow 3 + u_{k+1} > 3 + u_k \Rightarrow \sqrt{3+u_{k+1}} > \sqrt{3+u_k}$

$\Rightarrow u_{k+2} > u_{k+1}$. Do đó (1) đúng khi $n = k+1$.

Vậy (1) đúng với mọi n nguyên dương, do đó dãy số tăng.

**Bài toán 7.** Xét tính tăng, giảm của dãy số:

a) $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n . \sqrt{n}$

b) $u_n = \left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)...\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$

***Giải***

a) Ta có: $u_n > 0$ nên $u_{n+1} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} . \sqrt{n+1}$

Lập tỉ số $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} . \sqrt{n+1} : \left(\dfrac{2}{3}\right)^n . \sqrt{n}$

$= \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} = \sqrt{\dfrac{4n+4}{9n+4}} = \sqrt{\dfrac{4n+4}{4n+4+(5n-4)}} < 1, \forall n \ge 1.$

Do đó $u_{n+1} < u_n, \forall n \ge 1$. Vậy dãy số giảm.

b) Ta có $u_n > 0, \forall n \ge 1$, và

$u_{n+1}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$

Do đó $\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{1}{3^{n+1}}<1,\forall n\Rightarrow u_{n+1}<u_n,\forall n$. Vậy dãy số giảm.

**Bài toán 8.** Xét tính tăng, giảm của dãy số:

a) $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ b) $v_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}$

***Giải***

a) Ta có $u_n>0$ và $u_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ nên

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}:\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1}.\frac{n+1}{n}$

$=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}.\frac{n+1}{n}>\left(1-\frac{1}{n+1}\right).\frac{n+1}{n}=1$

Do đó $\forall n\ge 1,u_{n+1}>u_n$: dãy số tăng.

b) Ta có: $v_{n+1}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}$

Do đó: $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}-\frac{1}{n+1}$

$=\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{2}{3n+3}=\frac{9n+5}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}>0$

Nên $v_{n+1}>v_n,\forall n\ge 1$. Vậy dãy số tăng.

**Bài toán 9.** Cho dãy số $(u_n):0<u_n<1,u_n\ne\frac{1}{2}$ và $u_{n+1}(1-u_n)=\frac{1}{4},n\ge 1$. Chứng minh rằng dãy tăng.

***Giải***

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương: $u_{n+1}(1-u_n)\ge 2\sqrt{u_{n+1}(1-u_n)}$

$\Rightarrow u_{n+1}(1-u_n)\ge 2\sqrt{\frac{1}{4}}\Rightarrow u_{n+1}>u_n,\forall n$

Dấu = xảy ra khi $u_{n+1}=u_n$. Do đó: $u_{n+1}(1-u_n)=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow u_n(1-u_n)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4u_n^2-4u_n+1=0\Leftrightarrow (2u_n-1)^2=0$

$\Leftrightarrow u_n=\frac{1}{2}$ (loại). Vậy $\forall n\ge 1,u_{n+1}>u_n$ nên dãy số tăng.

**Bài toán 10.** Tìm a để dãy $u_n=\frac{an^2+1}{2n^2+3}$ là:

a) dãy số giảm b) dãy số tăng

***Giải***

Ta có $u_n=\frac{a}{2}+\frac{2-3a}{2(2n^2+3)}\Rightarrow u_{n+1}=\frac{a}{2}+\frac{2-3a}{2\left[2(n+1)^2+3\right]}$

Do đó $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2-3a}{2}\left(\dfrac{1}{2(n+1)^2+3}-\dfrac{1}{2n^2+3}\right)$

Vì $2(n+1)^2+3>2n^2+3>0\Rightarrow \dfrac{1}{2(n+1)^2+3}-\dfrac{1}{2n^2+3}<0,\forall n\ge 1$

Do đó:

a) Dãy $u_n$ giảm $\Leftrightarrow \dfrac{2-3a}{2}>0\Leftrightarrow a<\dfrac{2}{3}$

b) Dãy $u_n$ tăng $\Leftrightarrow \dfrac{2-3a}{2}<0\Leftrightarrow a>\dfrac{2}{3}$

## Dạng toán 3: TÍNH CHẤT BỊ CHẶN

*- Dãy số $(u_n)$ được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho:* $\forall n\in N^*,u_n\le M$.

*- Dãy số $(u_n)$ được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho:* $\forall n\in N^*,u_n\ge m$.

*- Dãy số $(u_n)$ được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới; nghĩa là tồn tại một số M và một số m sao cho:* $\forall n\in N^*,m\le u_n\le M$.

***Phương pháp xét tính bị chặn của dãy số*** $u_n$.

*- Dãy bị chặn trên nếu có số M:* $u_n\le M,\forall n$

*- Dãy bị chặn dưới nếu có số m:* $u_n\ge m,\forall n$

*- Dãy bị chặn nếu vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.*

***Chú ý:***

*1) Đánh giá $u_n$ với số 0, số 1,... hoặc dùng bất đẳng thức cơ bản.*
*2) Biến đổi, tính gọn, nhân chia lượng liên hiệp, chia tách trước.*
*3) Sử dụng phương pháp quy nạp.*

**Bài toán 1.** Chứng minh dãy:

a) $u_n=n^2-4n$ bị chặn dưới　　　　b) $v_n=\dfrac{n+1}{n+3}$ bị chặn trên.

***Giải***

a) Ta có $u_n=n^2-4n=(n-2)^2-4=-4+(n-2)^2\ge -4,\forall n$

Vậy dãy số bị chặn dưới.

b) Ta có $\forall n\ge 1$ thì $n+1<n+3$ nên $v_n=\dfrac{n+1}{n+3}<1,\forall n$

Vậy dãy số bị chặn trên.

**Bài toán 2.** Chứng minh dãy số bị chặn:

a) $u_n=\dfrac{6n^3-2n+1}{n^3+2n}$　　　　b) $v_n=6\sin n+7cos2n$

***Giải***

a) $\forall n\ge 1:u_n=\dfrac{2n(3n^2-1)+1}{n^3+2n}>0$: bị chặn dưới.

Vì $u_n=\dfrac{(6n^3+12n)-14n+1}{n^3+2n}=6-\dfrac{14n-1}{n^3+2n}<6$ : bị chặn trên

Vậy dãy số bị chặn.

b) Ta có $-6\le 6\sin n\le 6,\ -7\le 7cos2n\le 7$ với mọi n

Do đó: $-13\le v_n\le 13,\forall n$. Vậy dãy số bị chặn.

**Bài toán 3.** Chứng minh dãy:

a) $u_n = n^2 + 5n + 1$ không bị chặn trên.

b) $v_n = -n^3$ không bị chặn dưới.

***Giải***

Ta có phương pháp phản chứng

a) Giả sử dãy $u_n$ bị chặn trên nên tồn tại số M sao cho $u_n \le M, \forall n$

$\Rightarrow n^2 + 5n + 1 \le M, \forall n$

$\Rightarrow 5n \le M, \forall n \Rightarrow n \le M, \forall n$: vô lý. Vậy dãy số không bị chặn trên.

b) Giả sử dãy $v_n$ bị chặn dưới nên tồn tại số m sao cho $v_n \ge m, \forall n$

$\Rightarrow -n^3 \ge m, \forall n \Rightarrow\Rightarrow n^3 \le -m, \forall n$

$\Rightarrow n \le \sqrt[3]{-m}, \forall n$: vô lý.

Vậy dãy số không bị chặn dưới.

**Bài toán 4.** Chứng minh dãy số bị chặn:

a) $u_n = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ b) $v_n = \dfrac{n + (-1)^n}{4n+3}$

***Giải***

a) $u_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right) + ... + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right) = \dfrac{n}{2n+1}$

*Do đó* $0 < u_n < 1, \forall n$ *nên dãy số bị chặn.*

b) *Ta có* $(-1)^n$ *bằng 1 hoặc -1 nên* $n - 1 \le n + (-1)^n \le n + 1$.

c) Do đó $\dfrac{n-1}{4n+3} \le v_n \le \dfrac{n+1}{4n+3} \Rightarrow 0 \le v_n \le 1, \forall n$. Vậy dãy số bị chặn.

**Bài toán 5.** Cho dãy $(a_n) : a_n = \dfrac{2}{n^2 + 4n + 3}$

Xét dãy $(b_n) : b_1 = a_1, b_{n+1} = b_n + a_{n+1}, n \ge 1$.

a) Tính $b_n$ theo n. b) Chứng minh dãy $(b_n)$ bị chặn trên.

***Giải***

a) Theo đề bài ta có: $b_1 = a_1, b_2 = b_1 + a_2 = a_1 + a_2$

$b_3 = b_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3, ..., b_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$

a có $a_k = \dfrac{2}{k^2 + 4k + 3} = \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+3}$ nên:

$b_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$

$= \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + ... + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right) - \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + ... + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3}\right)$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3}$

Vậy $b_n = \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3}$

b) Ta có $b_n = \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3} \le \dfrac{5}{6}$ với mọi n.

Vậy dãy $(b_n)$ bị chặn trên.

**Bài toán 6.** Chứng minh dãy bị chặn: $u_1 = \frac{1}{2}, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$

***Giải***

Ta chứng minh quy nạp: $0 < u_n < 1$ (1)

Khi $n = 1$ thì $u_1 = \frac{1}{2}$: đúng.

Giả sử (1) đúng khi $n = k$, k nguyên dương: $0 < u_k < 1$

Ta chứng minh (1) đúng khi $n = k + 1$:

$u_{k+1} = \frac{u_k^2 + 1}{2} > 0$ và $u_{k+1} = \frac{u_k^2 + 1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$ nên $0 < u_{k+1} < 1$

Vậy (1) đúng với mọi n nguyên dương, do đó dãy số bị chặn.

## Dạng toán 4: TOÁN TỔNG HỢP

*- Dãy số $(u_n)$ tăng nếu với mọi n ta có $u_n < u_{n+1}$*

*- Dãy số $(u_n)$ giảm nếu với mọi n ta có $u_n > u_{n+1}$*

*- Dãy số $(u_n)$ bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới; tồn tại một số M và một số m sao cho: $\forall n \in N^*, m \le u_n \le M$.*

*- Xác định dãy nhờ các các dãy phụ, các đẳng thức, các tổng, các biến đổi gọn, dùng quy nạp,...*

*- Dùng tính chất tuần hoàn $u_{n+k} = u_n$ để tính tổng...*

**Bài toán 1.** Xét tính đơn điệu và bị chặn của dãy: $u_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 3}$

***Giải***

Ta có: $u_1 = -2, u_2 = 1, u_3 = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

Do đó $u_1 < u_2, u_2 > u_3$ nên dãy số không tăng, không giảm.

Ta có: $u_n = \frac{1}{2} + \frac{5}{2(2n^2 - 3)}$

Vì $\forall n \ge 1, -1 \le \frac{1}{2n^2 - 3} \le \frac{1}{5}$ nên $-2 \le u_n \le 1$. Vậy dãy số bị chặn.

**Bài toán 2.** Xét tính đơn điệu và bị chặn của dãy: $v_n = \frac{n^2}{2^n}$

***Giải***

Ta có $v_n > 0$ với mọi n nguyên dương

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} : \frac{n^2}{2^n} = \frac{(n+1)^2}{2n^2}$$

Xét $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1 \Rightarrow \frac{(n+1)^2}{2n^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{n+1}{n\sqrt{2}} < 1 \Leftrightarrow n + 1 < n\sqrt{2} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \Leftrightarrow n \ge 3$

Xét $\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1 \Rightarrow n < \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \Leftrightarrow n \le 2$

Do đó $u_1 < u_2 < u_3$ và $u_3 > u_4 > u_5 > ...$

Vậy dãy số không tăng, không giảm và $0 < u_n < u_3 = \frac{9}{8}, \forall n \ge 1$ nên dãy số bị chặn.

**Bài toán 3.** Chứng minh rằng dãy số $(u_n)$ với $u_n=\dfrac{2n+3}{3n+2}$ là một dãy số giảm và bị chặn.

***Giải***

Ta có $u_n=\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{3(3n+2)}$ nên $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{3(3n+5)}$

Do đó $u_{n+1}-u_n=\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{1}{3n+5}-\dfrac{1}{3n+2}\right)<0$, với mọi $n\ge 1$

Vậy $(u_n)$ là một dãy số giảm.

Vì $u_n$ là một dãy số giảm nên bị chặn trên bởi $M=u_1=1$.

Và $\forall n\ge 1:\dfrac{5}{3(3n+2)}>0$ nên $u_n>\dfrac{2}{3},\forall n\ge 1$: bị chặn dưới.

Vậy dãy $(u_n)$ bị chặn.

**Bài toán 4.** Chứng minh rằng dãy $u_n=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{n^2}$ tăng và bị chặn.

***Giải***

Ta có: $u_{n+1}=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}=u_n+\dfrac{1}{(n+1)^2}$

Nên $u_{n+1}>u_n,\forall n\ge 1$: dãy tăng

Vì dãy số tăng nên bị chặn dưới bởi $m=u_1=1$.

Ta có: $u_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{n^2}<1+\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+...+\dfrac{1}{(n-1)n}$

$=1+\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+...+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$

$=2-\dfrac{1}{n}<2,\forall n\ge 1$: bị chặn trên. Vậy dãy số bị chặn.

**Bài toán 5.** Cho số $a>0$. Chứng minh dãy $u_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{...+\sqrt{a}}}}$ (n dấu căn) là dãy tăng và bị chặn.

***Giải***

Ta chứng minh quy nạp: $u_{n+1}>u_n,\forall n\ge 1$ (1)

Khi $n=1$: $u_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}>\sqrt{a}=u_1$: đúng.

Giả sử $u_{k+1}>u_k\Rightarrow a+u_{k+1}>a+u_k$

$\Rightarrow\sqrt{a+u_{k+1}}>\sqrt{a+u_k}\Rightarrow u_{k+2}>u_{k+1}$: đpcm

Vậy dãy số $u_n$ tăng. Ta có $u_n>0$ và từ (1) nên $\sqrt{a+u_n}>u_n$

$\Rightarrow a+u_n>u_n^2\Rightarrow u_n^2-u_n-a<0$

$\Rightarrow\dfrac{1-\sqrt{4a+1}}{2}<u_n<\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$. Vậy dãy bị chặn.

**Bài toán 6.** Chứng minh dãy $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$ là dãy giảm và bị chặn.

***Giải***

Ta có: $u_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}$

Do đó: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

$=\frac{2}{2\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<0$ : dãy giảm

Vì dãy số giảm nên bị chặn trên bởi $u_1=-1$

Ta có: $\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$, áp dụng:

$u_n=2\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+...+2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)-2\sqrt{n}$

$=-2+2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}=-2+2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)>-2$

Do đó dãy số bị chặn dưới. Vậy dãy số bị chặn.

**Bài toán 7.** Cho số $a\in(0,1)$. Chứng minh dãy $u_n$:

$u_1=\frac{a}{2},u_n=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}u_{n+1}^2,n\geq 2$, tăng và bị chặn.

***Giải***

Vì $0<a<1$ nên $u_n>0,\forall n$

Ta chứng minh quy nạp: $u_{n+1}>u_n,n\geq 1$ (1)

Khi $n=1$: $u_2=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}.\frac{a^2}{4}>\frac{a}{2}=u_1$: đúng.

Giả sử (1) đúng khi $n=k$, k nguyên dương:

Ta chứng minh (1) đúng khi $n=k+1$. Thật vậy: $u_{k+1}>u_k\Rightarrow u_{k+1}^2>u_k^2$

$\Rightarrow\frac{a}{2}+\frac{1}{2}u_{k+1}^2>\frac{a}{2}+\frac{1}{2}u_k^2\Rightarrow u_{k+2}>u_{k+1}$: đpcm.

Ta chứng minh quy nạp: $u_n<1,n\geq 1$ (2)

Khi $n=1$: $u_1=\frac{a}{2}<1$: đúng.

Giả sử (2) đúng khi $n=k$, k nguyên dương:

Ta chứng minh (2) đúng khi $n=k+1$.

Thật vậy: $u_{k+1}=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}.u_k^2<\frac{a}{2}+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ : đpcm.

Vậy dãy số tăng và bị chặn.

**Bài toán 8.** Cho dãy số $(s_n)$ với $s_n=\sin(4n-1)\frac{\pi}{6}$

a) Chứng minh rằng $s_n=s_{n+3}$ với mọi $n\geq 1$.

b) Hãy tính tổng 15 số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

***Giải***

a) Với n là số nguyên dương tùy ý, ta có:

$s_{n+3}=\sin\left[4(n+3)-1\right]\frac{\pi}{6}=\sin\left[4n-1+12\right]\frac{\pi}{6}$

$=\sin\left[4(n-1)\frac{\pi}{6}+2\pi\right]=\sin(4n-1)\frac{\pi}{6}=s_n$

b) Từ kết quả trên ta có:

$s_1+s_2+s_3=s_4+s_5+s_6=s_7+s_8+s_9=s_{10}+s_{11}+s_{12}=s_{13}+s_{14}+s_{15}$

Mà $s_1=\sin\frac{\pi}{2}=1,s_2=\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2},s_3=\sin\frac{11\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

Nên: $S_{15} = s_1 + s_2 + ... + s_{15} = 5(s_1 + s_2 + s_3) = 5\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$

**Bài toán 9.** Cho dãy số $u_n$ xác định bởi: $u_1 = 1, u_{n+1} = -\frac{3}{2}u_n^2 + \frac{5}{2}\mathrm{u}_n + 1, n \ge 1$

Tính tổng 18 số hạng đầu tiên.

***Giải***

Ta có $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 0, u_4 = 1, u_5 = 2, ...$

Ta chứng minh quy nạp: $u_{n+3} = u_n, n \ge 1$ (1)

Khi $n = 1$ thì $u_4 = 1 = u_1$ : đúng.

Giả sử (1) đúng khi $n = k$, k nguyên dương:

Ta chứng minh (1) đúng khi $n = k + 1$.

Thật vậy: $u_{k+4} = -\frac{3}{2}u_{k+3}^2 + \frac{5}{2}\mathrm{u}_{k+3} + 1 = -\frac{3}{2}u_k^2 + \frac{5}{2}\mathrm{u}_k + 1 = u_{k+1}$ : đpcm.

Tổng 18 số hạng đầu tiên

$S_{18} = (u_1 + u_2 + u_3) + (u_4 + u_5 + u_6) + ... + (u_{16} + u_{17} + u_{18})$

$= 6(u_1 + u_2 + u_3) = 6(1 + 2 + 0) = 18$

**Bài toán 10.** Cho dãy $(u_n)$ được xác định:

$u_1 = 2000; u_2 = 2001; u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 3, n = 1, 2, 3...$

a) Tìm $u_n$ b) Tính tổng n số hạng đầu tiên $S_n$.

***Giải***

a) Ta có $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 3$

Do đó $u_3 - 2u_2 + u_1 = 3; u_4 - 2u_3 + u_2 = 3; ...; u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2} = 3$

Cộng từng vế $n - 2$ đẳng thức trên thì được:

$u_n - u_{n-1} - u_2 + u_1 = 3(n-2)$

$u_n - u_{n-1} = 3(n-2) + u_2 - u_1 = 3n - 5$

Do đó $u_3 - u_2 = 3.3 - 5; u_4 - u_3 = 3.4 - 5; ...; u_n - u_{n-1} = 3.n - 5$

Cộng từng vế $n - 2$ đẳng thức trên:

$u_n - u_2 = 3(3 + 4 + ... + n) - 5(n-2)$

Nên $u_n = \frac{3.(n+3)(n-2)}{2} - 5n + 2011 = \frac{3n^2 - 7n}{2} + 2002$

b) Ta có $u_1 = \frac{3}{2}.1^2 - \frac{7}{2}.1 + 2002; u_2 = \frac{3}{2}.2^2 - \frac{7}{2}.2 + 2002; ...;$

$u_n = \frac{3}{2}.\mathrm{n}^2 - \frac{7}{2}.\mathrm{n} + 2002$

Do đó $S_n = \frac{3}{2}(1^2 + 2^2 + ... + n^2) - \frac{7}{2}(1 + 2 + ... + n) + 2002.n$

Vậy $S_n = n(n-3)(n+1) + 2002.n$.

**Bài toán 11.** Cho dãy Fibonaxi $(u_n): u_1 = u_2 = 1; u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$

Chứng minh:

a) $u_{n+2} = 1 + u_1 + u_2 + ... + u_{2n}$ b) $u_1 + u_3 + u_5 + ... + u_{2n-1} = u_{2n}$

***Giải***

a) Ta có $u_1 = u_2; u_1 + u_2 = u_3; u_2 + u_3 = u_4; ...; u_n + u_{n+1} = u_{n+2}$

Cộng từng vế thì có: $u_1 + (u_1 + u_2 + ... + u_n) = u_{n+2}$

Mà $u_1 = 1$ nên $1 + u_1 + u_2 + ... + u_n = u_{n+2}$

b) Ta có:

$u_1 = u_2; u_2 + u_3 = u_4; u_4 + u_5 = u_6; ...; u_{2n-2} + u_{2n-1} = u_{2n}$

Cộng từng vế thì có: $u_1 + u_3 + u_5 + ... + u_{2n-1} = u_{2n}$

**Bài toán 12.** Dãy $(a_n)$ được thành lập theo quy tắc sau:

$a_1 = 1, a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1}, ..., a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$

Chứng minh $\sqrt{2n-1} < a_n < \sqrt{3n-2}, n > 1$

***Giải***

Với mọi $k > 1$ ta có $a_k^2 = a_{k-1}^2 + 2 + \frac{1}{a_{k-1}^2}$

Để ý rằng $a_k > 1, \forall k \geq 1$ nên $a_{k-1}^2 + 2 < a_k^2 < a_{k-1}^2 + 3$

Từ đó ta có: $a_{n-1}^2 + 2 < a_n^2 < a_{n-1}^2 + 3;\ a_{n-2}^2 + 2 < a_{n-1}^2 < a_{n-2}^2 + 3 ...;$

$a_2^2 + 2 < a_3^2 < a_2^2 + 3;\ a_1^2 + 2 < a_2^2 < a_1^2 + 3$

Suy ra: $2n - 1 < a_n^2 < 3n - 2, \forall n \geq 1$

Vậy $\sqrt{2n-1} < a_n < \sqrt{3n-2}, \forall n \geq 1$ (đpcm).

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

**Bài toán 1.** Viết 9 số hạng đầu của các dãy số sau:

a) $u_n = (-1)^n \tan\frac{n\pi}{3} + \sin\frac{n\pi}{4}$

b) $u_1 = 2, u_{n+1} = 3u_n - 7n^3$

***HD-ĐS***

a) Thế lần lượt $n = 1;2;3;4;5;6;7;8;9$ thì có kết quả

b) Dãy truy hồi nên tính lần lượt $u_2; u_3; ...; u_8; u_9$.

**Bài toán 2.** Xác định số hạng tổng quát của dãy số:

a) $u_1 = 2, u_n = u_{n-1} + 7, n \geq 2$

b) $v_1 = 3, v_n = 5v_{n-1}, n \geq 2$

***HD-ĐS***

a) Kết quả $u_n = 7n - 5$

b) Kết quả $v_n = 3.5^{n-1}$

**Bài toán 3.** Xác định số hạng tổng quát của dãy:

a) $u_1 = 2, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}$

b) $u_1 = 2, u_2 = 3, u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}, n \geq 2$

***HD-ĐS***

a) xét dãy phụ $v_n = u_n = \frac{1}{2}$

b) xét dãy phụ $v_n = u_n - u_{n-1}$

**Bài toán 4.** Cho dãy $(u_n)$ xác định bởi: $u_1 = 1, u_{n+1} = 3u_n + 10, n \geq 1$

Chứng minh $u_n = 2.3^n - 5, n \geq 1$.

***HD-ĐS***

Chứng minh quy nạp.

**Bài toán 5.** Chứng minh dãy:

a) $u_n = n^2 + 4n + 7$ không bị chặn trên.

b) $v_n = (-1)^n.n$ không bị chặn dưới.

***HD-ĐS***

a) Dùng phương pháp phản chứng.

b) Dùng phương pháp phản chứng.

**Bài toán 6.** Chứng minh dãy tăng và bị chặn trên:

a) $u_n = \dfrac{7n+5}{5n+7}$ b) $v_n = \dfrac{1}{3+1} + \dfrac{1}{3^2+1} + \ldots + \dfrac{1}{3^n+1}$

***HD-ĐS***

a) Kết quả $u_n \le 2$.

b) Kết quả $v_n \le \dfrac{1}{2}$

**Bài toán 7.** Chứng minh dãy giảm và bị chặn dưới:

a) $u_n = \dfrac{n+1}{5n-1}$ b) $v_n = \dfrac{1}{3^n+n}$

***HD-ĐS***

a) Kết quả $u_n \ge 0$.

b) Kết quả $v_n \ge 0$

**Bài toán 8.** Cho dãy số $u_n = 1 + 2^n(n-1)$

Tính tổng: $T = 1 + 2.2^1 + 3.2^2 + 4.2^3 + \ldots + 2018.2^{2017}$

***HD-ĐS***

$u_{n-1} - u_n = (n+1).2^n$

Kết quả $T = 1 + 2^{2018}.2017$.