CHUYÊN ĐỀ: SỐ PHỨC

I. DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC .

1. Một số phức là một biểu thức có dạng $a+bi$, trong đó a, b là các số thực và số i thoả mãn $i^2=-1$.
Ký hiệu số phức đó là z và viết $z=a+bi$ (dạng đại số)

i được gọii là đơn vị ảo

a được gọi là phần thực. Ký hiệu $\mathrm{Re}(z)=a$

b được gọi là phần ảo của số phức $z=a+bi$, ký hiệu $\mathrm{Im}(z)=b$

Tập hợp các số phức ký hiệu là C.

Chú ý:

- Mỗi số thực a dương đều được xem như là số phức với phần ảo b = 0.
- Số phức $z=a+bi$ có a = 0 được gọi là số thuần ảo hay là số ảo.
- Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.

2. Hai số phức bằng nhau.

Cho $z=a+bi$ và $z'=a'+b'i$.

$$z=z' \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$$

3. Biểu diễn hình học của số phức.

Mỗi số phức được biểu diễn bởi một điểm M(a;b) trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

Ngược lại, mỗi điểm M(a;b) biểu diễn một số phức là $z=a+bi$.

4. Phép cộng và phép trừ các số phức.

Cho hai số phức $z=a+bi$ và $z'=a'+b'i$. Ta định nghĩa:

$$\begin{cases} z+z'=(a+a')+(b+b')i \\ z-z'=(a-a')+(b-b')i \end{cases}$$

5. Phép nhân số phức.

Cho hai số phức $z=a+bi$ và $z'=a'+b'i$. Ta định nghĩa:

$$zz'=aa'-bb'+(ab'-a'b)i$$

6. Số phức liên hợp.

Cho số phức $z=a+bi$. Số phức $\overline{z}=a-bi$ gọi là số phức liên hợp với số phức trên.

Vậy $\overline{z}=\overline{a+bi}=a-bi$

Chú ý:

1) $\overline{\overline{z}}=z \Rightarrow$ z và $\overline{z}$ gọi là hai số phức liên hợp với nhau.

2) z.$\overline{z}$ = a^2+b^2

- Tính chất của số phức liên hợp:

(1): $\overline{\overline{z}}=z$

(2): $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$

(3): $\overline{z.z'}=\overline{z}.\overline{z'}$

(4): z.$\overline{z}$ = $\sqrt{a^2+b^2}$ ($z=a+bi$)

7. Môđun của số phức.

Cho số phức $z = a + bi$. Ta ký hiệu $|z|$ là môđun của số phư z, đó là số thực không âm được xác định như sau:

- Nếu M(a;b) biểu diễn số phức $z = a + bi$, thì $|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- Nếu $z = a + bi$, thì $|z| = \sqrt{z.\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

8. Phép chia số phức khác 0.

Cho số phức $z = a + bi \neq 0$ *(tức là* $a^2 + b^2 > 0$ *)*

Ta định nghĩa số nghịch đảo z^{-1} của số phức $z \neq 0$ là số

$$z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2}\overline{z} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$$

Thương $\frac{z'}{z}$ của phép chia số phức z' cho số phức $z \neq 0$ được xác định như sau:

$$\frac{z'}{z} = z.z^{-1} = \frac{z'.\overline{z}}{|z|^2}$$

Với các phép tính cộng, trừ, nhân chia số phức nói trên nó cũng có đầy đủ tính chất giao hoán, phân phối, kết hợp như các phép cộng, trừ, nhân, chia số thực thông thường.

II. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC.

1. Cho số phức $z \neq 0$. Gọi M là một điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z. Số đo (radian) của mỗi góc lượng giác tia đầu là Ox, tia cuối OM được gọi là một acgumen của z.

Như vậy nếu φ là một acgumen của z, thì mọi acgumen đều có dạng: $\varphi + 2k\pi$, $k \in Z$.

2. Dạng lượng giác của số phức.

Xét số phức $z = a + bi \quad (a, b \in R, z \neq 0)$

Gọi r là môđun của z và φ là một acgumen của z.

Ta có: $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trong đó $r > 0$, được gọi là dạng lượng giác của số phức $z \neq 0$.

$z = a + bi$ (a, b ∈ R) gọi là dạng đại số của z.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ là môđun của z.

φ là một acgumen của z thỏa $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases}$

3. Nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác.

Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ $(r \geq 0,\ r' \geq 0)$

thì: $z.z' = r.r'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]$ và $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')]$

4. Công thức Moivre.

Với $n \in N^*$ thì $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

5. Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác.

Căn bậc hai của số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(r > 0)$ là $\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$ và

$$-\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right)$$

A. BÀI TẬP VỀ SỐ PHỨC VÀ CÁC THUỘC TÍNH

Dạng 1: Các phép tính về Số phức

Phương pháp:
- Sử dụng các công thức cộng , trừ, nhân, chia và luỹ thừa số phức.

Chú ý:
Trong khi tính toán về số phức ta cũng có thể sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ như trong số thực. Chẳng hạn bình phương của tổng hoặc hiệu, lập phương của tổng hoặc hiệu 2 số phức…

Bài 1: Cho số phức $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Tính các số phức sau: $\bar{z}$; z^2 ; $(\bar{z})^3$; $1 + z + z^2$

Giải:

a. Vì $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \Rightarrow \bar{z} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

b. Ta có $z^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\Rightarrow (\bar{z})^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$(\bar{z})^3 = (\bar{z})^2\bar{z} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{4}i - \frac{\sqrt{3}}{4} = i$$

Ta có: $1 + z + z^2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{3+\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

Nhận xét:

Trong bài toán này, để tính $(\bar{z})^3$ ta có thể sử dụng hằng đẳng thức như trong số thực.

Tương tự: Cho số phức $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Hãy tính : $1 + z + z^2$

Ta có $z^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Do đó: $1 + z + z^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0$

Bài 2:
a. Tính tổng sau: $1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2009}$
b. Cho hai số phức z_1, z_2 thoả mãn $|z_1| = |z_2| = 1; |z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. Tính $|z_1 - z_2|$.

Giải:

Ta có $1-i^{2010}=(1-i)\left(1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{2009}\right)$

Mà $1-\ i^{2010}=2$. Nên $1+i+i^2+i^3+...+i^{2009}=\dfrac{2}{1-i}=1+i$

b. Đặt $z_1=a_1+b_1i;\ z_2=a_2+b_2i$.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} a_1^2+b_1^2=a_2^2+b_2^2=1 \\ (a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2=3 \end{cases}$

Suy ra $2(a_1b_1+a_2b_2)=1 \Rightarrow (a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2=1 \Rightarrow |z_1-z_2|=1$

Bài 3: Tính giá trị của biểu thức:

a. $P=\dfrac{i^5+i^7+i^9+...+i^{2009}}{i^4+i^6+i^7...+i^{2010}}\quad (i^2=-1)$

b. $M=1+(1+i)^2+(1+i)^4+...+(1+i)^{10}$

c. $N=(1-i)^{100}$

Giải:

a. Ta có $i^5+i^7+i^9+...+i^{2009}=i^5\left(1+i^2+i^4+...+i^{2004}\right)=i.\dfrac{1-\left(i^2\right)^{1003}}{1-i^2}=i$

$i^4+i^5+i^6+...+i^{2010}=\left(1+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6...+i^{2010}\right)-\left(1+i^2+i^3\right)$

$=\dfrac{1-i^{2011}}{1-i}-(1-1-i)=i+1 \Rightarrow P=\dfrac{i}{i+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

b. M là tổng của 10 số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có số hạng đầu tiên $u_1=1$, công bội $q=(1+i)^2=2i$

Ta có : $M=u_1.\dfrac{1-q^{10}}{1-q}=1.\dfrac{1-(2i)^{10}}{1-2i}=\dfrac{1+2^{10}}{1-2i}=\dfrac{1025(1+2i)}{5}=205+410i$

c. $N=(1-i)^{100}=\left[(1-i)^2\right]^{50}=(-2i)^{50}=(-2)^{50}(i)^{50}=-2^{50}$

Bài 4:

a. Cho số phức $z=\dfrac{1-i}{1+i}$. Tính giá trị của z^{2010}.

b. Chứng minh $3(1+i)^{2010}=4i(1+i)^{2008}-4(1+i)^{2006}$

Giải:

a. Ta có : $z=\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1+i)^2}{2}=i$

nên $z^{2010}=i^{2010}=i^{4\times502+2}=i^{4\times502}.i^2=1.(-1)=-1$

b. Tacó: $3(1+i)^{2010}=4i(1+i)^{2008}-4(1+i)^{2006} \Leftrightarrow 3(1+i)^4=4i(1+i)^2-4 \Leftrightarrow (1+i)^4=-4$

$\Leftrightarrow 4i^2=-4 \Rightarrow$ (đpcm).

Bài 5: Tính số phức sau:

a. $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{16}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^8$ b. $z=(1+i)^{15}$

Giải:

a. Ta có: $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{2}=\frac{2i}{2}=i\Rightarrow\frac{1-i}{1+i}=-i$

Vậy $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{8}=i^{16}+\left(-i\right)^{8}=2$

b. Ta có:

$\left(1+i\right)^{2}=1+2i\ -1=2i\Rightarrow\left(1+i\right)^{14}=\left(2i\right)^{7}=128.i^{7}=-128.i$

$z=\left(1+i\right)^{15}=\left(1+i\right)^{14}\left(1+i\right)=-128i\ \left(1+i\right)=-128\ \left(-1+i\right)=128-128i.$

Bài 6: Tính: $i^{105}+i^{23}+i^{20}-i^{34}$

Giải:

Để tính toán bài này, ta chú ý đến định nghĩa đơn vị ảo để từ đó suy ra luỹ thừa của đơn vị ảo như sau:

Ta có: $i^{2}=-1;\ i^{3}=-i;\ i^{4}=i^{3}.i\ =1;\ i^{5}=i;\ i^{6}=-1\ldots$

Bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được: $i^{4n}=1;\ i^{4n+1}=i;\ i^{4n+2}=-1;\ i^{4n+3}=-i;\ \forall n\in N^{*}$

Vậy $i^{n}\in\left\{-1;1;-i;i\right\},\forall n\in N.$

Nếu n nguyên âm, $i^{n}=\left(i^{-1}\right)^{-n}=\left(\frac{1}{i}\right)^{-n}=\left(-i\right)^{-n}$.

Như vậy theo kết quả trên, ta dễ dàng tính được:

$i^{105}+i^{23}+i^{20}-i^{34}=i^{4.26+1}+i^{4.5+3}+i^{4.5}-i^{4.8+2}=i-\ i+1+1=2$

Bài 7:

a. Tính : $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

b. **(TN – 2008)** Tìm giá trị của biểu thức: $P=(1+\sqrt{3}i)^{2}+(1-\sqrt{3}i)^{2}$

Giải:

a. Ta có: $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{1}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

b. $P=-4$

Dạng 2: Số phức và thuộc tính của nó

Loại 1: Tìm phần thực và phần ảo

Phương pháp:

Biến đổi số phức về dạng $z=a+bi$, suy ra phần thực là a, phần ảo là b

Bài 1: Tìm phần thực, phần ảo của các số phức sau

a. $z = i + (2-4i) - (3-2i)$	b. $z = (-1+i)^3 - (2i)^3$	c. $z = \frac{(1+i)^{2010}}{1-i}$

Giải:

a. $z = (0+2-3) + (1-4+2)i = -1 - i.$

Vậy số phức đã cho có phần thực là − 1, phần ảo là − 1.

b. Kết quả: 2 + 10i

c. $z = \frac{(1+i)^{2010}}{1-i} = \frac{(2i)^{1005}(1+i)}{2} = 2^{1004} i(1+i) = -2^{1004} + 2^{1004} i$

Bài 2:

a. Tìm phần thực, phần ảo của số phức $i + (2-4i) - (3-2i)$

b. **(TN – 2010)** Cho hai số phức: $z_1 = 1+2i, z_2 = 2-3i$. Xác định phần thực và phần ảo của số phức $z_1 - 2z_2$.

c. **(TN – 2010)** Cho hai số phức: $z_1 = 2+5i, z_2 = 3-4i$. Xác định phần thực và phần ảo của số phức $z_1.z_2$.

d. Cho số phức z thỏa mãn $\begin{cases} |z| = 1 \\ \left|z + \frac{i}{z}\right| = 2 \end{cases}$. Tìm số phức liên hợp của z

Giải:

a. Ta có: $i + (2-4i) - (3-2i) = (\ 0+2) + (1-4)i + (-3+2i) = (2-3) + (-3+2)i = -1 - i$

Vậy số phức đã cho có phần thực là – 1, phần ảo là – 1.

b. Phần thực – 3 ; Phần ảo 8

c. Phần thực 26 ; Phần ảo 7

d. Theo giả thiết $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (a^2 - b^2)^2 + (2ab+1)^2 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = \frac{1}{2} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$

$$\ldots \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \\ z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \bar{z} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \\ \bar{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \end{array}\right.$$

Bài 3: Tìm phần thực, phần ảo của số phức

a. $(-1+i)^3 - (2i)^3$

b. $z = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \ldots + (1+i)^{20}$

c. $(1-i)^{2009}$

Giải:

a. Ta có:

$(-1+i)^3 = (-1)^3 + 3(-1)^2 i + 3(-1)i^2 + i^3 = 2 + 2i$

$(2i)^3 = 2^3 \times i^3 = -8i$

$\Rightarrow \left(-1+i\right)^3 - \left(2i\right)^3 = 2+10i$

Vậy số phức đã cho có phần thực là 2, phần ảo là 10.

b. Ta có $P = 1+(1+i)+...+(1+i)^{20} = \dfrac{(1+i)^{21}-1}{i}$

$(1+i)^{21} = \left[(1+i)^2\right]^{10}.(1+i) = (2i)^{10}(1+i) = -2^{10}(1+i)$

$P = \dfrac{-2^{10}(1+i)-1}{i} = -2^{10} + \left(2^{10}+1\right)i$

Vậy: phần thực -2^{10} , phần ảo: $2^{10}+1$

c. Ta có $\left(1-i\right)^{2009} = \left(\left(1-i\right)^2\right)^{1004}(1-i) = (-2i)^{1004}(1-i) = 2^{1004}(1-i) = 2^{1004} - 2^{1004}i$

Vậy phần thực của số phức trên là 2^{1004} và ảo là -2^{1004}

Bài 4: (ĐH – A 2010) Tìm phần ảo của số phức z, biết $\overline{z} = \left(\sqrt{2}+i\right)^2\left(1-\sqrt{2}i\right)$

Giải:

Ta có: $\overline{z} = \left(\sqrt{2}+i\right)^2\left(1-\sqrt{2}i\right) = \left(1+2\sqrt{2}i\right)\left(1-\sqrt{2}i\right) = 1-\sqrt{2}i+2\sqrt{2}i-4i^2 = 5+\sqrt{2}i$

$\Rightarrow z = 5-\sqrt{2}i$

Phần ảo của số phức z bằng $-\sqrt{2}$.

Bài 5: (CD – 2010) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\left(2-3i\right)z+\left(4+i\right)\overline{z} = -\left(1+3i\right)^2$. Tìm phần thực và phần ảo của z.

Giải:

Gọi $z = a+bi\ \left(a\in R, b\in R\right) \Rightarrow \overline{z} = a-bi$

Đẳng thức đã cho trở thành

$\left(2-3i\right)\left(a+bi\right)+\left(4+1\right)\left(a-bi\right) = -\left(1+3i\right)^2 \Leftrightarrow 6a+4b-2(a+b)i = 8-6i$ (coi đây là một phươn trình bậc nhất theo i)

Đồng nhất theo i hệ số hai vế ta được

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a+4b=8 \\ 2a+2b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=5 \end{cases}$

Vậy số phức z đã cho có phần thực là -2, phần ảo là 5

Bài 5: (CD – A 2009) Cho số phức z thỏa mãn $\left(1+i\right)^2\left(2-i\right)z = 8+i+\left(1+2i\right)z$. Tìm phần thực và phần ảo của z.

Giải:

Ta có: $\left(1+i\right)^2\left(2-i\right)z = 8+i+\left(1+2i\right)z$

$\Leftrightarrow z\left[\left(1+i\right)^2\left(2-i\right)-\left(1+2i\right)\right] = 8+i \Leftrightarrow z\left[2i\left(2-i\right)-1-2i\right] = 8+i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{8+i}{2i+1} = \dfrac{\left(8+i\right)\left(1-2i\right)}{5} = \dfrac{8-15i+2}{5} = \dfrac{10-15i}{5} = 2-3i$

Vậy số phức z đã cho có phần thực là 2, phần ảo là -3

Bài 8: Tìm phần thực của số phức $z = \left(1+i\right)^n$, biết rằng n $\in$ N thỏa mãn phương trình

$\log_4(n-3)+\log_4(n+9)=3$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} n\in N \\ n>3 \end{cases}$

Phương trình $\log_4(n-3)+\log_4(n+9)=3 \Leftrightarrow \log_4(n-3)(n+9)=3$

$\Leftrightarrow (n-3)(n+9)=4^3 \Leftrightarrow n^2+6n-91=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n=7 & \text{(thoả mãn)} \\ n=-13 & \text{(không thoả mãn)} \end{array}\right.$

Vậy n = 7.

Khi đó $z=(1+i)^n=(1+i)^7=(1+i).\left[(1+i)^2\right]^3=(1+i).(2i)^3=(1+i).(-8i)=8-8i$

Vậy phần thực của số phức z là 8.

Loại 2: Biểu diễn hình học của số phức

Phương pháp:

- Sử dụng điểm $M(a;b)$ biểu diễn số phức z trên mặt phẳng Oxy

Chú ý:

Với câu hỏi ngược lại " Xác định số phức được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$" khi đó ta có $z=a+bi$

… đang cập nhật

Loại 3: Tính modun của số phức

Phương pháp:

Biến đổi số phức về dạng $z=a+bi$, suy ra modun là $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

Bài 1:

a. Tìm môđun của số phức $z=1+4i+(1-i)^3$

b. **(ĐH – A 2010)** Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z}=\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^2}{1-i}$. Tìm môđun của số phức $\bar{z}+iz$

c. Cho số phức z thỏa mãn $i.\bar{z}=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{11}+\left(\dfrac{2i}{1+i}\right)^8$. Tìm môđun của số phúc $w=\bar{z}+iz$.

d. Tính mô đun của số phức: $Z=1+4i+(1-i)^3$

Giải:

a. Vì $(1-i)^3=1^3-3i+3i^2-i^3=1-3i-3+i=-2-2i$.

Suy ra : $z=1+4i+(1-i)^3=-1+2i \Rightarrow |z|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

b. $\bar{z}=\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i}$.

Cách 1: (dành cho ban cơ bản)

Ta có $\left(1-\sqrt{3}i\right)^3=1^3+3.1^2\left(-\sqrt{3}i\right)+3.1.\left(-\sqrt{3}i\right)^2-3\sqrt{3}i^3=-8$

Do đó $\overline{z} = \frac{-8}{1-i} = \frac{-8(1+i)}{2} - 4 - 4i \Rightarrow z = -4+4i$

$\Rightarrow \overline{z} + iz = -4 - 4i + (-4+4i)i = -8 - 8i$

Vậy $\left|\overline{z} + iz\right| = 8\sqrt{2}.$

Cách 2: (Dành cho ban nâng cao)
Biểu diễn dưới dạng lượng giác
Ta có

$(1-\sqrt{3}i) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \Rightarrow (1-\sqrt{3}i)^3 = 8\left[\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right] = -8$

$\Rightarrow \overline{z} = \frac{-8}{1-i} = \frac{-8(1+i)}{2} = -4 - 4i$

$\Rightarrow \overline{z} + \text{iz} = -4 - 4\text{i} + \text{i}(-4+4\text{i}) = -8(1+\text{i}) \Rightarrow \left|\overline{z} + \text{iz}\right| = 8\sqrt{2}$

c. Ta có $i.\overline{z} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{11} + \left(\frac{2i}{1+i}\right)^{8} \Leftrightarrow i.\overline{z} = \left[\frac{(1+i)^2}{2}\right]^{11} + \left(\frac{2i(1-i)}{2}\right)^{8}$

$\Leftrightarrow i\overline{z} = (i)^{11} + (1+i)^8 = 16 - i \Rightarrow \overline{z} = -1 - 16i \Rightarrow z = -1 + 16i$

Do đó $w = \overline{z} + iz = -1 - 16i + i(-1+16i) = -17 - 17i$

Vậy $|w| = \sqrt{17^2 + 17^2} = 17\sqrt{2}$

d. $Z = 1 + 4i + (1-i)^3 = 1 + 4i + 1 - 3i\ 3i^2 - i^3 \ = -1\ +\ 2i$

$\Rightarrow |Z| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

Bài 2: Tìm mô đun của số phức $z = \frac{(1+i)(2-i)}{1+2i}$

Giải:

Ta có : $z = \frac{5+i}{5} = 1 + \frac{1}{5}i$

Vậy, mô đun của z bằng: $|z| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{5}$

Loại 4: Tìm số đối của số phức z

Phương pháp:
Biến đổi số phức về dạng $z = a + bi$, suy ra số đối $-z = -a - bi$
…đang cập nhật

Loại 5: Tìm số phức liên hợp của số phức z

Phương pháp:
Biến đổi số phức về dạng $z = a + bi$, suy ra số phức liên hợp là $\overline{z} = a - bi$

Bài 1: Tìm nghiệm của phương trình $\overline{z} = z^2$, trong đó $\overline{z}$ là số phức liên hợp của số phức z .

Giải:

Gọi $z = a + bi$, trong đó a,b là các số thực

Ta có : $\overline{z} = a - bi$ và $z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$

Khi đó : $\overline{z} = z^2 \Leftrightarrow$ Tìm các số thực a,b sao cho : $\begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases}$

Giải hệ trên ta được các nghiệm $(0;0)$, $(1;0)$, $\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Bài 2: Tìm số phức liên hợp của: $z = (1+i)(3-2i) + \frac{1}{3+i}$

Giải:

Ta có: $z = 5 + i + \frac{3-i}{(3+i)(3-i)} = 5 + i + \frac{3-i}{10}$

Suy ra số phức liên hợp của z là: $\overline{z} = \frac{53}{10} - \frac{9}{10}i$

Loại 6: Tìm số phức nghịch đảo của số phức z

Phương pháp:

Sử dụng công thức $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$

…đang cập nhật

Loại 7: Ứng dụng sự bằng nhau của hai số phức để tìm các số thực

Phương pháp:

Cho $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$.

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Bài 1: Tìm các số nguyên x, y sao cho số phức $z = x + yi$ thoả mãn $z^3 = 18 + 26i$.

Giải:

Ta có $(x+yi)^3 = 18 + 26i \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 18 \\ 3x^2y - y^3 = 26 \end{cases} \Rightarrow 18(3x^2y - y^3) = 26(x^3 - 3xy^2)$.

Giải phương trình bằng cách đặt $y = tx$ $(x \neq 0)$ ta được $t = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 3, y = 1.$

Vậy $z = 3 + i$.

Bài 2: Tìm các số nguyên x, y sao cho số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $(1-3i)(2x+yi) = 1+i$

Giải:

Ta có $(1-3i)(2x+yi) = 1+i \Leftrightarrow 2x - 3y + (y-6x)i = 1+i$ $(*)$

Coi $(*)$ là phương trình bậc nhất theo i, đồng nhất hệ số hai vế ta được kết quả

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ y - 6x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{10} \\ y = \dfrac{2}{5} \end{cases}$

Bài 3: Tìm hai số thực x, y thoả mãn: $x(3+5i) + y(1-2i)^3 = 9 + 14i$

Giải:

Ta có $x(3+5i) + y(1-2i)^3 = x(3+5i) + y(-11+2i) = (3x-11y) + (5x+2y)i$

Do đó x, y thoả mãn hệ $\begin{cases} 3x - 11y = 9 \\ 5x + 2y = 14 \end{cases}$.

Giải hệ ta được $x = \dfrac{172}{61}$ và $y = -\dfrac{3}{61}$

Bài 9: Giải phương trình nghiệm phức: $z^2 = \overline{z}$

Giải:

Đặt $z = a + bi \ (a, b \in R)$, ta có: $z^2 = \overline{z} \Leftrightarrow (a+bi)^2 = a - bi \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases}$

Giải hệ trên ta tìm được $(a;b) = (0;0);(1;0);\left(-\dfrac{1}{2};\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Vậy $z = 0;\ z = 1;\ z = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Dạng 3: Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện cho trước

Bài 1: Tìm số phức z thỏa mãn

a. $(2+3i)z = z - 1$ b. $|z|^2 + 2z.\overline{z} + |\overline{z}|^2 = 8$ và $z + \overline{z} = 2$

Giải:

a. Ta có: $z(1+3i) = -1 \Leftrightarrow z = \dfrac{-1}{1+3i} = \dfrac{3i-1}{10} = -\dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{10}i$

b. $|z|^2 + 2z.\overline{z} + |\overline{z}|^2 = 8 \Leftrightarrow 4(x^2+y^2) = 8 \Leftrightarrow (x^2+y^2) = 2$ (1)

$z + \overline{z} = 2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ (2)

Từ (1) và (2) tìm được x = 1 ; y = ±1

Vậy các số phức cần tìm là $1 + i$ *và* $1 - i$

Bài 2: Tìm số phức z thỏa mãn : $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$

Giải:

Ta có $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \left[\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 - 1\right]\left[\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 + 1\right] = 0$

TH 1: $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2-1=0 \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i}=\pm1 \Leftrightarrow z=0$

TH 2: $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2+1=0 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2-i^2=0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{z+i}{z-i}\right)-i\right]\left[\left(\frac{z+i}{z-i}\right)+i\right]=0 \Leftrightarrow z=\pm1$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn

Bài 3: Tìm số phức z thỏa mãn hệ $\begin{cases} \left|\frac{z-1}{z-i}\right|=1 \quad (1) \\ \left|\frac{z-3i}{z+i}\right|=1 \ (2) \end{cases}$

Giải:

Cách 1: (Phương pháp đại số)

Giả sử $z=x+yi$, khi đó $\left|\frac{z-1}{z-i}\right|=1 \Leftrightarrow |z-1|=|z-i| \Leftrightarrow |x+yi-1|=|x+yi-i|$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=x^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow x=y.$

Ta lại có: $\left|\frac{z-3i}{z+i}\right|=1 \Leftrightarrow |z-3i|=|z+i| \Leftrightarrow |x+yi-3i|=|x+yi+i| \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=x^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=1$. Vậy số phức phải tìm là $z=1+i$

Cách 2: (Phương pháp hình học)

Nhận xét:

Với hai số phức z và z' $(z' \neq 0)$ ta luôn có $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$

Từ (1) $|z-1|=|z-i|$. Gọi A và B là hai điểm biểu diễn các số 1 và i tức là $A(1;0)$, $B(0;1)$

Từ đó $|z-1|=|z-i| \Leftrightarrow MA=MB$, ở đây $M=M(z)$ là điểm biểu diễn số phức z

Vậy M nằm trên đường trung trực của AB tức là M nằm trên đường thẳng $y=x$

Tương tự $(2) \Leftrightarrow |z-3i|=|z+i| \Leftrightarrow MA'=MB'$ hay M nằm trên trung trực của $A'B'$ tức là M nằm trên đường thẳng $y=1$

Từ (1) và (2) ta có M nằm trên giao của hai đường thẳng trên tức là $M(1;;1) \Rightarrow z=1+i$

Bài 4: (ĐH – D 2010) Tìm số phức z thỏa mãn: $|z|=\sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

Giải:

Gọi z = a + bi $(a \in R, b \in R)$, ta có: $\overline{z}=\sqrt{a^2+b^2}$ và $z^2=a^2-b^2+2abi$

Yêu cầu bài toán tỏa mãn khi và chỉ khi: $\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ a^2-b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=1 \\ b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\pm1 \\ b=\pm1 \end{cases}$

Vậy các số phức cần tìm là: $1+i;\ 1-i;\ -1+i;\ -1-i.$

Bài 5: (ĐH –B 2009) Tìm số phức z thỏa mãn $|z-(2+i)|=\sqrt{10}$ và $z.\overline{z}=25$.

Giải:

Gọi z = a + bi $(a \in R, b \in R)$,

Ta có: $z-(2+i)=(a-2)+(b-1)i$;

Từ giả thiết ta có: $\left|z-(2+i)\right|=\sqrt{10} \Leftrightarrow (a-2)^2+(b-1)^2=\sqrt{10} \quad (1)$

và $z.\bar{z}=25 \Leftrightarrow a^2+b^2=25 \quad (2)$

Giải hệ (1) và (2) ta được $\begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \vee \begin{cases} a=5 \\ b=0 \end{cases}$

Vậy các số phức cần tìm là: $z=3+4i$ hoặc $z=5$

Bài 6: Tìm số phức z thỏa mãn: $z^2+|z|=0$

Giải:

Gọi z = x + yi $(x, y \in R)$,

Khi đó $z^2+|z|=0 \Leftrightarrow (x+yi)^2+\sqrt{x^2+y^2}=0 \Leftrightarrow \left(x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}\right)+2xyi=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}=0 \\ 2xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}=0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ -y^2+|y|=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ x^2+|x|=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ |y|(1-|y|)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ |x|(1+|x|)=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ \left[\begin{array}{l} |y|=0 \\ 1-|y|=0 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ \left[\begin{array}{l} |x|=0 \\ 1+|x|=0 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ \left[\begin{array}{l} y=0 \\ |y|=1 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ x=0\left(do\,|x|+1>0\right) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=0, y=0 \\ x=0, y=1 \\ x=0, y=-1 \end{array}\right. \\ x=0, y=0 \end{array}\right.$$

Vậy các số phức cần tìm là: $z=0; z=i; z=-i$

Bài 7: Tìm số phức z thoả mãn : $|z-2+i|=2$. Biết phần ảo nhỏ hơn phần thực 3 đơn vị.

Giải:

Gọi số phức $z=a+bi$

Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} |a-2+(b+1)i|=2 \\ b=a-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2+(b+1)^2=4 \\ b=a-2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2-\sqrt{2} \\ b=-1-\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a=2+\sqrt{2} \\ b=-1+\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy số phức cần tìm là: $z=2-\sqrt{2}+\left(-1-\sqrt{2}\right)i$; $z=2+\sqrt{2}+\left(-1+\sqrt{2}\right)i$

Bài 8: Tìm số phức z thỏa mãn $(z-1)\left(\bar{z}+2i\right)$ là số thực và $|z-1|=\sqrt{5}$.

Giải:

Đặt $z=a+bi$ (a,b là số thực)
Ta có

$(z-1)(\overline{z}+2i)=a^2+b^2-a-2b+(2a+b-2)i$ là số thực $\Rightarrow 2a+b-2=0\ (1)$

$|z-1|=\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2+b^2}=\sqrt{5}\ (2)$

Từ (1) và (2) ta có $(a;b)=(0;2);(2;-2)$

Vậy $z=2i; z=2-2i$

Bài 9:

a. Tìm số phức z để cho: $z.\overline{z}+3(z-\overline{z})=4-3i$.

b. **(ĐH – D 2009)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-(3-4i)|=2|$

Giải:

Gọi số phức $z=x+yi\ (x,y\in R)$
Ta có

$z.\overline{z}+3(z-\overline{z})=4-3i$

$\Leftrightarrow (x+yi)(x-yi)+3[(x+yi)-(x-yi)]=4-3i$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+3(2yi)=4-3i \Leftrightarrow x^2+y^2+6yi=4-3i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 6y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{1}{2} \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2} \end{cases}$

Vậy: $z=\dfrac{\sqrt{15}}{2}-\dfrac{1}{2}i;\ z=-\dfrac{\sqrt{15}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

b. Giả sử $M(a;b)$ biểu thị số phức $z=x+yi\ (x,y\in R)$

Theo giả thiết ta có $z-(3-4i)=x-3+(y+4)i$

Vậy $\Leftrightarrow |z-(3-4i)|=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}=2 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=4$

Do đó tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z trong mp Oxy là đường tròn tâm $I(3;-4)$ và bán kính $R=2$.

Bài 10: Tìm số phức z thỏa mãn: $\begin{cases} 2|z-i|=|z-\overline{z}+2i| \\ |z^2-(\overline{z})^2|=4 \end{cases}$

Giải:

Gọi số phức $z=x+yi\ (x,y\in R)$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2|x+(y-1)i|=|(2y+2)i| \\ |4xyi|=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|x+(y-1)i|=|2(y+1)i| \\ |4xyi|=4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2+(y-1)^2} = 2\sqrt{(y+1)^2} \\ |xyi| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x} \\ y = -\dfrac{1}{x} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt[3]{4} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{cases}$$

Vậy số phức cần tìm là : $z = \pm\sqrt[3]{4} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}i$

Bài 11: (ĐH – B 2010) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z-i| = |(1+i)z|$

Giải:

Giả sử $z = a+bi \ (a,b \in R)$.

Suy ra : $z-i = a+(b-1)i$ và $(1+i)z = (1+i)(a+bi) = (a-b)+(a+b)i$

Theo giả thiết

$$|z-i| = |(1+i)z| \Leftrightarrow |a+(b-1)i| = |(a-b)+(a+b)i| \Leftrightarrow \sqrt{a^2+(b-1)^2} = \sqrt{(a-b)^2+(a+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2+(b^2-2b+1) = 2(a^2+b^2) \Leftrightarrow a^2+b^2+2b-1 = 0 \Leftrightarrow a^2+(b+1)^2 = 2$$

Vậy tạp hợp các điểm M biểu diễn các số phức z là đường tròn $I(0;-1)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$

Bài 12: Trong các số phức z thoả mãn điều kiện $|z-2+3i| = \dfrac{3}{2}$. Tìm số phức z có modul nhỏ nhất.

Giải:

Giả sử $z = x+yi$, khi đó:

$$|z-2+3i| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow |(x-2)+(y+3)i| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2 = \frac{9}{4}.$$

Tập hợp điểm M thoả mãn điều kiện đã cho là đường tròn (C) tâm $I(2;-3)$ và bán kính $R = \dfrac{3}{2}$

Môđun của z ($|z|$) đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M thuộc đường tròn (C) và gần O nhất

$\Rightarrow$ M trùng với M_1 là giao của đường thẳng OI với đường tròn (C).

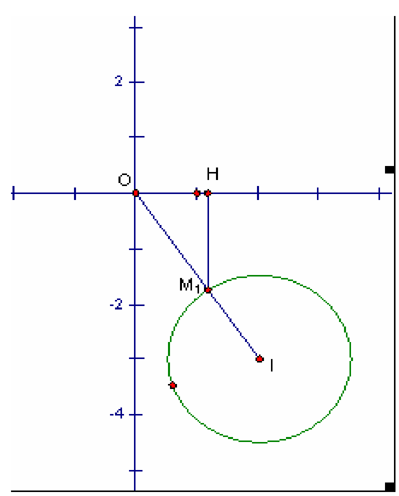
Ta có: $OI = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

Kẻ $M_1H \perp Ox$. Theo định lý Talet ta có:

$$\frac{M_1H}{3} = \frac{OM_1}{OI} = \frac{\sqrt{13}-\frac{3}{2}}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{13}M_1H = 3\sqrt{13} - \frac{9}{2} = \frac{6\sqrt{13}-9}{2}$$

$$\Rightarrow M_1H = \frac{6\sqrt{13}-9}{2\sqrt{13}} = \frac{78-9\sqrt{13}}{26}$$



Lại có: $\frac{OH}{2}=\frac{\sqrt{13}-\frac{3}{2}}{\sqrt{13}} \Rightarrow OH=\frac{26-3\sqrt{13}}{13}$

Vậy số phức cần tìm là: $z=\frac{26-3\sqrt{13}}{13}+\frac{78-9\sqrt{13}}{26}\mathrm{i}$

Bài 13: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1-2i|=2$, tìm số phức z có modun nhỏ nhất.

Giải:

Gọi $z = x + yi$, $M(x\,;y)$ là điểm biểu diễn số phức z

Ta có

$|z-1-2i|=2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=4$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ có tâm (1;2)

Đường thẳng OI có phương trình $y=2x$

Số phức z thỏa mãn điều kiện và có môdun nhỏ nhất khi và chỉ khi điểm biểu diễn số phức đó thuộc đường tròn (C) và gần gốc tọa độ O nhất, điểm đó chỉ là một trong hai giao điểm của đường thẳng OI với (C), khi đó tọa độ của nó thỏa mãn hệ

Chọn $\begin{cases} y=2x \\ (x-1)^2+(y-2)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\frac{2}{\sqrt{5}} \\ x=1+\frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$

Với $x=1-\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow y=2-\frac{4}{\sqrt{5}}$ nên số phức $z=\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+\left(2-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)i$

Cách 2:

Gọi $z = x + yi$, $M(x\,;y)$ là điểm biểu diễn số phức z

Ta có $|z-1-2i|=2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=4$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ có tâm $I(1;2)$ và $R=2$

Chuyển đường tròn về dạng tham số đặt $\begin{cases} x=1+2\sin t \\ y=2+2\cos t \end{cases} \Rightarrow M(1+2\sin t;2+2\cos t)$

Modun của số phức z chính là độ dài của $\overrightarrow{OM}$

Ta có $|z|^2=OM^2=(1+2\sin t)^2+(2+2\cos t)^2=9+4(\sin t+2\cos t)$

Mặt khác theo BĐT Bunhiacopxki ta có $(\sin t+2\cos t)\le(1^2+2^2)(\sin^2 t+\cos^2 t)=5$

$\Rightarrow -\sqrt{5}\le \sin t+2\cos t\le\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{9-4\sqrt{5}}\le|z|\le\sqrt{9+4\sqrt{5}}$

Vậy $|z|_{\min}=\sqrt{9-4\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sin t+2\cos t=-\sqrt{5} \Leftrightarrow \sin t=-\frac{1}{\sqrt{5}}, \cos t=-\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow x=1-\frac{2}{\sqrt{5}}, y=2-\frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow z=\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+\left(2-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)i$

Chú ý:

Nếu yêu cầu tìm

$|z|_{\max} = \sqrt{9+4\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sin t + 2\cos t = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sin t = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos t = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow x = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, y = 2 + \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow z = \left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \left(2+\frac{4}{\sqrt{5}}\right)i$

Bài 14: Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất thỏa mãn: $\left|\frac{z+1-5i}{\overline{z}+3-i}\right| = \sqrt{2}$

Giải:

Gọi $z = a+bi$ (a,b thuộc R) $\Rightarrow \overline{z} = a - bi$

Ta có $\frac{z+1-5i}{\overline{z}+3-i} = \frac{a+bi+1-5i}{a-bi+3-i} = \frac{(a+1)+(b-5)i}{(a+3)-(b+1)i}$

Theo giả thiết

$$\left|\frac{z+1-5i}{\overline{z}+3-i}\right| = \frac{\sqrt{(a+1)^2+(b-5)^2}}{\sqrt{(a+3)^2+(b+1)^2}} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(a+1)^2+(b-5)^2}}{\sqrt{(a+3)^2+(b+1)^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2+b^2+10a+14b-6=0 \quad (*)$$

$(*)$ là phương trình của đường tròn trong mặt phẳng phức

Nên số phức có môđun nhỏ nhất phần thực và phần ảo là nghiệm của đường tròn $(*)$ và đường thẳng IO với $I(-5;-7)$ là tâm của đường tròn

Gọi I là tâm của mặt cầu (S). $I \in d \Rightarrow I(1+3t;-1+t;t)$, $R = IA = \sqrt{11t^2-2t+1}$

$$IO: \begin{cases} a = -5t \\ b = -7t \end{cases} \Rightarrow \text{Phương trình } 37t^2 - 74t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{34+2\sqrt{370}}{37} \\ t = \dfrac{37-2\sqrt{370}}{37} \end{array}\right.$$

Khi đó ta được

$$z = -5\frac{34+2\sqrt{370}}{37} - 7\frac{34+2\sqrt{370}}{37}, \; z = -5\frac{37-2\sqrt{370}}{37} - 7\frac{37-2\sqrt{370}}{37}(loai)$$

Vậy số phức cần tìm là $z = -5\frac{34+2\sqrt{370}}{37} - 7\frac{34+2\sqrt{370}}{37}$

Bài 15: Trong số các số phức thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i| = |z-2i|$. Tìm số phức z có modun nhỏ nhất

Giải:

Giả sử số phức $z = x+yi \; (x, y \in R)$

Theo giả thiết ta có

$|z-2-4i| = |z-2i| \Leftrightarrow |(x-2)-(y-4)i| = |x-(y-2)|$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2 = x^2+(y-2)^2 \Leftrightarrow x+y-4=0 \Leftrightarrow y = -x+4$

Do đó tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là đường thẳng $y=-x+4$

Mặt khác ta có $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(-x+4)^2}=\sqrt{2x^2-8x+16}=\sqrt{2(x-2)^2+8}\ge 2\sqrt{2}$

$|z|_{\min}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=-2\Rightarrow z=2+2i$

Nhận xét:

Qua các bài ta thấy để tìm ta có thể dùng hình học, bất đẳng thức hoặc tam thức bậc hai như bài toán sau đây

Bài 16: Xét số phức z thỏa mãn $z=\dfrac{1-m}{1-m(m-2i)}\ (m\in R)$

a. Tìm m để $z.\bar{z}=\dfrac{1}{2}$

b. Tìm m để $|z-i|\le\dfrac{1}{4}$

c. Tìm số phức z có modun lớn nhất

HD:

a. $m=\pm1$

b. $-\dfrac{1}{\sqrt{15}}\le m\le\dfrac{1}{\sqrt{15}}$

c. Ta có $|z|=\sqrt{\dfrac{m^2+1}{(m^2+1)}}=\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}\le1\Rightarrow|z|_{\max}=1\Leftrightarrow m=0\Leftrightarrow z=i$

Dạng 4: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp:

Loại 1: Số phức z thỏa mãn về độ dài (modun), khi đó ta sử dụng công thức $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

Loại 2: Số phức z là số thực (thực âm hoặc thực dương). Khi đó ta sử dụng kết quả

a. Để z là số thực điều kiện là $b=0$

b. Để z là số thực âm điều kiện là $\begin{cases}a<0\\b=0\end{cases}$

c. Để z là số thực dương điều kiện là $\begin{cases}a>0\\b=0\end{cases}$

d. Để z là số ảo điều kiện là $a=0$

Bài 1: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức các số phức z thoả mãn:

a. $|z|=|\bar{z}-3+4i|$

b. $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|=1$

Giải:

a. Đặt $z=x+yi\ (x,y\in R)$, ta có $|z|=|\bar{z}-3+4i|\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-3)^2+(4-y)^2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=(x-3)^2+(4-y)^2\Leftrightarrow x^2+y^2=x^2-6x+9+16-8y+y^2\Leftrightarrow 6x+8y=25$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là đường thẳng có phương trình $6x+8y=25$.

b. Đặt $z = x + yi\ (x, y \in R)$, ta có $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-i| = |z+i| \Leftrightarrow |x+(y-1)i| = |x+(y+1)i|$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow y = 0$.

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là trục thực Ox

Bài 2: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức số phức $\omega = (1+i\sqrt{3})z + 2$ biết rằng số phức z thoả mãn: $|z-1| \le 2$.

Giải:

Đặt $z = a + bi\ (a, b \in R)$ và $\omega = x + yi\ (x, y \in R)$

Ta có $|z-1| \le 2 \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 \le 4\quad (1)$

Từ $\omega = (1+i\sqrt{3})z + 2 \Rightarrow x + yi = (1+i\sqrt{3})(a+bi) + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b\sqrt{3} + 2 \\ y = \sqrt{3}a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = a - 1 + b\sqrt{3} \\ y - \sqrt{3} = \sqrt{3}(a-1) + b \end{cases}$

Từ đó $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \le 4\left[(a-1)^2 + b^2\right] \le 16$ (do (1)).

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là hình tròn $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \le 16$, tâm $I(3;\sqrt{3})$, bán kính $R = 4$.

Bài 3: Giả sử M là điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z. Tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

a. $|z - 1 + i| = 2$ b. $|2 + z| > |z - 2|$ c. $1 \le |z + 1 - i| \le 2$

Giải:

a. **Cách 1:**

Ta có M là điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z và $I(1;-1)$ là điểm biểu diễn số phức $z = 1 - i$.

Theo giả thiết ta có: $MI = 2$.

Vậy tập hợp những điểm M chính là đường tròn tâm $I(1;-1)$ bán kính là $R = 2$.

Cách 2:

Đặt $z = x + yi$ suy ra $z - 1 + i = (x-1) + (y+1)i$.

nên $|z - 1 + i| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$.

Vậy tập hợp các điểm M(z) trên mặt phẳng toạ độ biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(1;-1)$ bán kính $R = 2$

b. Ta có: $2 + z = z - 1(-2)$

Ta có M là điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z và $\mathrm{A}(-2;0)$ là điểm biểu diễn số phức $z = -2$, $\mathrm{B}(2;0)$ là điểm biểu diễn số phức z = 2.

Dựa vào giải thiết ta có: $MA > MB$

$\Rightarrow$ M (nằm bên phải) đường trung trực $(x = 0)$ của A và B. Hay x > 0.

c. Ta có: $z + 1 - i = z - (-1 + i)$

Ta có M là điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z và $A(-1;1)$ là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + i$.

Ta có: $1 \le MA \le 2$.

Vậy M thuộc miền có hình vành khăn tạo bởi 2 đường tròn tâm $A(-1;1)$ bán kính lần lượt là 1 và 2.

Bài 4: Xác định tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z thõa mãn một trong các điều kiện sau.

a. $\left\|z+\bar{z}+3\right\|=4$	b. $\left\|z^2-\left(\bar{z}\right)^2\right\|=4$

Giải:
Đặt: $z=a+bi$
a. Ta có:

$$4z+\bar{z}=2a+3 \Leftrightarrow \left|z+\bar{z}+3\right|=\left|2a+3\right|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{2} \\ a=-\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$$

Vậy M có thể nằm trên đường thẳng $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$

b. Ta có:

$$\left|z^2-\left(\bar{z}\right)^2\right|=\left|4abi\right|=4\left|ab\right|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M\in xy=1 \\ M\in xy=-1 \end{array}\right.$$

Bài 5: Xác định tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa điều kiện sau: $\left\|\dfrac{z}{z-i}\right\|=3$

Giải:
Gọi $z=a+bi$ ta có:

$$\left|a+bi\right|=3\left|a+(b-1)i\right| \Leftrightarrow a^2+b^2=9\left(a^2+b^2-2b+1\right) \Leftrightarrow 8a^2+8b^2-18b+9=0$$

$$\Leftrightarrow 8a^2+8\left(b^2-\frac{9}{4}b+\frac{81}{64}\right)-\frac{9}{8}=0 \Leftrightarrow 8a^2+8\left(b-\frac{9}{8}\right)^2=\frac{9}{8} \Leftrightarrow a^2+\left(b-\frac{9}{8}\right)^2=\left(\frac{3}{8}\right)^2$$

Vậy quỹ tích các điểm biểu diễn số phức z chính là đường tròn tâm $I\left(0;\dfrac{9}{8}\right)$ bán kính $R=\dfrac{3}{8}$

Bài 6: Tìm tất cả những điểm của mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z sao cho: $\dfrac{z+i}{\bar{z}+i}$ là số thực.

Giải:
Gọi $z=a+bi$ ta có:

$$\frac{a+(b+1)i}{a+(1-b)i}=\frac{\left[a+(b+1)i\right]\left[a-(1-b)i\right]}{a^2+(b-1)^2}=\frac{\left[a^2+(1-b^2)\right]+\left[2abi\right]}{a^2+(b-1)^2}\in R \Leftrightarrow \begin{cases} ab=0 \\ a+(1-b)i\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right. \\ (a;b)\neq(0;1) \end{cases}$$

Vậy quỹ tích các điểm biểu diễn số phức z chính là những điểm nằm trên 2 trục tọa độ bỏ đi điểm (0;1)

Bài 7: Giả sử M(z) là điểm trên mặt phẳng toạ đô biểu diễn số phức z. Tìm tập hợp những điểm M(z) thỏa mãn điều kiện sau: $\left\|2+z\right\|=\left\|i-z\right\|$

Giải:
Cách 1:

$$\left|2+x+yi\right|=\left|i-x-yi\right| \Leftrightarrow \left(x+2\right)^2+y^2=x^2+\left(1-y\right)^2 \Leftrightarrow 4x+2y+3=0.$$

Vậy tập hợp các điểm M(z) là đường thẳng $4x + 2y + 3 = 0$.

Cách 2:

Gọi $A(-2;0)$, $B(0;1)$. Khi đó $|2+z| = |i-z| \Leftrightarrow |z-(-2)| = |z-i|$ hay là $M(z)A = M(z)B$.

Vậy tập hợp các điểm M(z) là đường trung trực của đoạn thẳng AB

Bài 8: (ĐH – D 2009) Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện $|z-(3-4i)| = 2$.

Giải:

Gọi $z = x + yi$ $(x \in R, y \in R)$, ta có: $z - 3 + 4i = (x-3) + (y+4)i$

Từ giả thiết ta có: $\sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$

Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(3;-4)$, bán kính R = 2.

Bài 9 : (ĐH – B 2010) Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức *z* thỏa mãn: $|z-i| = |(1+i)z|$

Giải:

Gọi $z = x + yi$ $(x \in R, y \in R)$, ta có:

$|z-i| = |(1+i)z| \Leftrightarrow |x + (y-1)i| = |(x-y) + (x+y)i|$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x-y)^2 + (x+y)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 2$

Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm I(0;-1), bán kính $R = \sqrt{2}$.

Bài 10: Xác định tập điểm biểu diễn số phức z thoả mãn: $|z-i| + |z+i| = 4$

Giải:

Giả sử: $z = x + yi$ (x, y$\in$ R)

Suy ra M(x; y) biểu diễn số phức z.

Ta có: $|z-i| + |z+i| = 4 \Leftrightarrow |x + (y-1)i| + |x + (y+1)i| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 4$ (*)

Đặt: $F_1(0;-1)$, $F_2(0;1)$

Thì (*) $\Leftrightarrow MF_2 + MF_1 = 4 > F_1F_2 = 2$

Suy ra Tập hợp điểm M là elip (E) có 2 tiêu điểm là F_1, F_2.

Ta viết phương trình elip (E):

Phương trình chính tắc của (E) có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \left(a > b > 0;\ b^2 = a^2 - c^2\right)$

Ta có: $\begin{cases} MF_1 + MF_2 = 2a = 4 \\ F_1F_2 = 2c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 3$

Vậy $(E): \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.

Bài 11: Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn hệ thức $2|z-1| = |z - \bar{z} + 2|$

Giải:

Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$2|z-1|=|z-\bar{z}+2| \Leftrightarrow 2|x+yi-1|=|x+yi-x+yi+2| \Leftrightarrow 2|x-1+yi|=|2+2yi|$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{4+4y^2} \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là 2 đường thẳng

Bài 12: Trên mp phức tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z:

1. $|z|=1$ 2. $|z|\le 2$ 3. $|z-\bar{z}+1-2i|=3$.

Giải:

Đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ và điểm M(x;y) biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức.

Ta có: $|z|=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$.

Vậy: Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O(0;0) bán kính R = 1.

2. Đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ và điểm M(x;y) biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức.

Ta có: $|z|\le 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}\le 2 \Leftrightarrow x^2+y^2\le 4$.

Vậy: Tập hợp các điểm M là hình tròn tâm O(0;0) bán kính R = 2.

3. Biểu diễn số phức $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ bởi điểm M(x; y) trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta có:

$|z-\bar{z}+1-2i|=3 \Leftrightarrow |1+2(y-1)i|=3 \Leftrightarrow \sqrt{1^2+(2y-2)^2}=3 \Leftrightarrow (y-1)^2=2 \Leftrightarrow y=1\pm\sqrt{2}$

Tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là hai đường thẳng song song với trục hoành $y=1\pm\sqrt{2}$.

Bài 13: Trên mp phức tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z:

1. $|z-1|=1$ 2. $|z-i|=1$

Giải:

Đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ và điểm M(x;y) biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức.

Ta có: $|z-1|=1 \Leftrightarrow |x+yi-1|=1 \Leftrightarrow |(x-1)+yi|=1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}=1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$.

Vậy: Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I(1;0) bán kính R = 1.

Đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ và điểm M(x;y) biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức.

Ta có: $|z-i|=1 \Leftrightarrow |x+yi-i|=1 \Leftrightarrow |x+(y-1)i|=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=1 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=1$.

Vậy: Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I(0;1) bán kính R = 1.

Bài 14: Xác định tập hợp điểm biểu diễn số phức thỏa điều kiện:

1. z^2 là số ảo 2. $z^2=(\bar{z})^2$ 3. $2|z-i|=|z-\bar{z}+2i|$

Giải:

1. Đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ và điểm M(x;y) biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức.

$z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$

Do z^2 là số ảo $\Leftrightarrow x^2-y^2=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0 \Leftrightarrow y=x \\ x+y=0 \Leftrightarrow y=-x \end{array}\right.$

Vậy: Tập hợp điểm là hai đường phân giác: $y=x,\ y=-x$.

2. Đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ và điểm M(x;y) biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức.

$z^2 = \left(\overline{z}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 - y^2 - 2xyi \Leftrightarrow 4xyi = 0 \Leftrightarrow x.y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$.

Vậy: Tập hợp điểm là các trục tọa độ.

3. Đặt $z = x + yi\ \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$ và điểm M(x;y) biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức.

$$2\left|z - i\right| = \left|z - \overline{z} + 2i\right| \Leftrightarrow 2\left|x + yi - i\right| = \left|x + yi - x + yi + 2i\right| \Leftrightarrow 2\left|x + \left(y-1\right)i\right| = \left|2yi + 2i\right|$$

$$\Leftrightarrow 2\left|x + \left(y-1\right)i\right| = 2\left|\left(y+1\right)i\right| \Leftrightarrow \left|x + \left(y-1\right)i\right| = \left|\left(y+1\right)i\right| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + \left(y-1\right)^2} = \sqrt{\left(y+1\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y-1\right)^2 = \left(y+1\right)^2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}$$

Vậy: Tập hợp các điểm M là parabol $y = \frac{x^2}{4}$.

Dạng 5: Số phức với các bài toán chứng minh

Phương pháp:

- Trong dạng này ta gặp các bài toán chứng minh một tính chất, hoặc một đẳng thức về số phức.
- Để giải các bài toán dạng trên, ta áp dụng các tính chất của các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, số phức liên hợp, môđun của số phức đã được chứng minh.

Bài 1: Chứng minh rằng với mỗi số phức z, có ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau xảy ra: $\left|z+1\right| \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$ hoặc $\left|z^2+1\right| \ge 1$

Giải:

Giả sử ta có đồng thời $\left|z+1\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ và $\left|z^2+1\right| < 1$. Đặt $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$

Ta có: $\begin{cases} (1+a)^2 + b^2 < \frac{1}{2} \\ (1+a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(a^2+b^2) + 4a + 1 < 0 \quad (1) \\ (a^2+b^2)^2 + 2(a^2-b^2) < 0 \quad (2) \end{cases}$

Cộng từng vế (1) với (2) ta được $(a^2+b^2)^2 + (2a+1)^2 < 0$ (vô lý). Suy ra đpcm.

Bài 2: Cho số phức $z \ne 0$ thoả mãn $\left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| \le 2$. Chứng minh rằng: $\left|z + \frac{1}{z}\right| \le 2$.

Giải:

Dễ chứng minh được rằng với hai số phức z_1, z_2 ta có $\left|z_1 + z_2\right| \le \left|z_1\right| + \left|z_2\right|$

Từ $\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z + \frac{1}{z}\right)$, suy ra $\left|z + \frac{1}{z}\right|^3 \le \left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| + 3\left|z + \frac{1}{z}\right| \le 2 + 3\left|z + \frac{1}{z}\right|$

Đặt $a = \left|z + \frac{1}{z}\right|$ ta được $a^3 - 3a - 2 \le 0 \Leftrightarrow (a-2)(a+1)^2 \le 0 \Rightarrow a \le 2$ (đpcm).

Bài 3: Chứng minh rằng $z^2 + z + 1 = 0;\ \overline{z} = z^2 = \frac{1}{z};\ z^3 = 1$. với $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Giải:

Do $z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow z^2 + z + 1 = (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) + (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) + 1 = 0$;

Lại có $\frac{1}{z} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Suy ra $z^2 = \bar{z} = \frac{1}{z}$. Hơn nữa ta có $z^3 = z^2.z = 1$.

Bài 4: Cho $z_1, z_2 \in C$. Chứng minh rằng : $E = z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2 \in \mathbb{R}$

Giải:

Để giải bài toán này ta sử dụng một tính chất quan trọng của số phức liên hợp đó là: $z \in R \Leftrightarrow z = \bar{z}$

Thật vậy:

Giả sử $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

$z = \bar{z} \Leftrightarrow x + yi = x - yi \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow z = x \in R$

Giải bài toán trên:

Ta có $\bar{E} = \overline{z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2} = \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} = E \Rightarrow E \in R$

Bài 5: Chứng minh rằng:

1. $E_1 = \left(2+i\sqrt{5}\right)^7 + \left(2-i\sqrt{5}\right)^7 \in R$

2. $E_2 = \left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^n + \left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^n \in R$

Giải:

1. Ta có: $\overline{E_1} = \overline{\left(2+i\sqrt{5}\right)^7 + \left(2-i\sqrt{5}\right)^7} = \overline{\left(2+i\sqrt{5}\right)^7} + \overline{\left(2-i\sqrt{5}\right)^7} = \left(2-i\sqrt{5}\right)^7 + \left(2+i\sqrt{5}\right)^7 = E_1 \Rightarrow E_1 \in R$

2. $E_2 = \left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^n + \left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^n = \left(\frac{(19+7i)(9+i)}{82}\right)^n + \left(\frac{(20+5i)(7-6i)}{85}\right)^n$

$= \left(\frac{164+82i}{82}\right)^n + \left(\frac{170-85i}{85}\right)^n = (2+i)^n + (2-i)^n$

$\Rightarrow \overline{E_2} = E_2 \Rightarrow E_2 \in R$

Bài 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho A và B là hai điểm lần lượt biểu diễn hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 6z + 18 = 0$. Chứng minh rằng tam giác OAB vuông cân.

Giải:

Phương trình : $z^2 - 6z + 18 = 0$ có $\Delta' = 9 - 18 = -9 = 9i^2$

nên có hai nghiệm $t_1 = 3 + 3i$ hoặc $t_2 = 3 - 3i$

Trong mặt phẳng tọa độ số phức t_1 có điểm biểu diễn là A(3 ;3)

số phức t_2 có điểm biểu diễn là B(3 ;-3)

ΔOAB có $OA = OB = 3\sqrt{2}$ nên ΔOAB cân tại O

$\overrightarrow{OA}(3;3)$, $\overrightarrow{OB}(3;-3) \Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Rightarrow OA \perp OB$

Nên ΔOAB vuông tại O. Vậy ΔOAB vuông cân tại O

Bài tập tự giải tổng hợp:

Dạng 1: Các phép toán về số phức

Bài 1: Thực hiện phép tính:

a. $A=\frac{4-3i}{1+i}+\frac{1+i}{4-3i}$ b. $B=\overline{\frac{7-2i}{8-6i}}$ c. $C=\frac{(3-2i)\left[(4+3i)-(1+2i)\right]}{5-4i}$

d. $D=(2-5i)+\frac{1+i\sqrt{2}}{2+i\sqrt{3}}$ e. $E=(2-3i)(1+2i)+\frac{4-i}{3+2i}$ f. $F=\frac{3-4i}{(1-4i)(2+3i)}$

g. $G=(1-i)(5+3i)-\frac{1}{3-2i}$

Đs:

b. $B=\frac{11}{15}+\frac{39}{25}i$

Bài 2: Tính giá trị biểu thức:

a. $A=(\sqrt{3}+\sqrt{2}.i)^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2}.i)^2$.

b. $P=(1-\sqrt{2}\,i)^2+(1+\sqrt{2}\,i)^2=-2$

c. $P=(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$

Đs:

c. $P=x^4+4$

Bài 3: Thực hiện các phép toán sau:

a. $(2-i)+\left(\frac{1}{3}-2i\right)$ b. $(2-3i)-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{4}i\right)$

c. $\left(3-\frac{1}{3}i\right)+\left(-\frac{3}{2}+2i\right)-\frac{1}{2}i$ d. $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}i\right)-\left(-\frac{5}{4}+\frac{3}{5}i\right)+\left(-3-\frac{4}{5}i\right)$

e. $[(3+2i)-(3-2i)]^2$ f. $\frac{(2+i)^3+(2-i)^3}{(2+i)^3-(2-i)^3}$

g. $\left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^2$ h. $i^1+i^2+...+i^{10}$ i. $i^1+i^2+...+i^{2008}$

Bài 4: Thực hiện phép tính:

a. $\frac{3}{1+2i}$ b. $\frac{1+i}{1-i}$ c. $\frac{m}{i\sqrt{m}}$ d. $\frac{a+i\sqrt{a}}{a-i\sqrt{a}}$

e. $\frac{3+i}{(1-2i)(1+i)}$ f. $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^2}{(3+2i)^2-(2+i)^2}$ g. $\frac{a+i\sqrt{b}}{i\sqrt{a}}$ h. $(2-i)^6$

Đs:

a. $\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i$ b. i c. $-i\sqrt{m}$ d. $\frac{a-1}{a+1}+\frac{2\sqrt{a}}{a+1}i$

e. $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$ f. $\frac{21}{34}+\frac{9}{17}i$ g. $\sqrt{\frac{b}{a}}-i\sqrt{a}$ h. $-117-44i$

Bài 5: Phân tích ra thừa số (thực chất là phân tích thành tích các đa thức)

a. $a^2 + 1$ b. $2a^2 + 3$ c. $4a^4 + 9b^2$ d. $3a^2 + 5b^2$

Đs:

a. $(a-i)(a+i)$ b. $(a\sqrt{2}-i\sqrt{3})(a\sqrt{2}+i\sqrt{3})$

c. $(2a – 3bi)(2a + 3bi)$ d. $(a\sqrt{3}-ib\sqrt{5})(a\sqrt{3}+ib\sqrt{3})$

Bài 6: Tính :

a. $1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+...+(1+i)^{20}$ b. $1+i+i^2+i^3+...+i^{2011}$

c. Tính $\frac{z_1}{z_2}$ biết rằng: $z_1=\sqrt{3}-i$ và $z_2=1+\sqrt{3}i$

Đs:

c. $\frac{z_1}{z_2}=-i$

Bài 7: Thực hiện phép tính

a. $(1-i)^{10}$ b. $(1+i)^8$ c. $(1-i)^3$ d. $(1+i)^3$ e. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$

Đs:

a. $-32i$ b. 16 c. $-2-2i$ d. $-2+2i$

Bài 8: Rút gọn các biểu thức sau đây

a. $\dfrac{z^2+\frac{1}{z}}{z+\frac{1}{z}-1}$ $(z\neq 0)$ b. $\dfrac{\sqrt{1+m^2}+mi}{m-i\sqrt{1+m^2}}$ (m là tham số thực)

c. $\frac{1}{z_1+z_2}.\left(\frac{1}{z_1^2+z_2^2}\right)+\frac{2}{(z_1+z_2)^2}.\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)$ $(z_1,z_2\neq 0)$

Đs:

a. $z+1$ b. i c. $\frac{z_1+z_2}{z_1^2z_2^2}$

Bài 9: Cho đa thức $P(z)=z^3+2z^2-3z+1$

Tính giá trị của $P(z)$ khi $z=1-i; z=2+i\sqrt{3}$

Đs: $P(1-i)=-4-3i;\ P(2+i\sqrt{3})=-13+14i\sqrt{3}$

Bài 10: Cho số phức $z=x+yi;\ x,y\in Z$ thỏa mãn $z^3=18+26i$.

Tính $T=(z-2)^{2010}+(4-z)^{2010}$

Bài 11: Rút gon biểu thức

a. $A=z^4+iz^3-(1+2i)z^2+3z+1+3i$ với $z=2+3i$

b. $B=(z-z^2+2z^3)(2-z+z^2)$ với $z=\frac{1}{2}(\sqrt{3}i-1)$

Đs:

a. $A = -92 - 156i$ b. $B = 7$

Dạng 2: Số phức và các thuộc tính của nó

Loại 1: Xác định phần thực và phần ảo của số phức

Bài 1: Tìm phần thực, phần ảo của số phức $z = (2-i)^3$.

Bài 2: Tìm phần thực và phần ảo của số phức:

a. $x = \dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i} - \dfrac{\sqrt{2}-i}{i}$ b. $(1+i)^2 - (1-i)^2$

c. $(2+i)^3 - (3-i)^3$ d. $z = \left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)^2$

Đs:

a. $\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}$ và $\dfrac{2\sqrt{2}-1-\sqrt{3}}{2}$ b. 0 và 4

c. – 16 và 37 d. $-\dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 3: Tìm phần thực và phần ảo của số phức: $x = \dfrac{2-i}{1+2i} - \dfrac{1+i}{3i}$

Bài 4: Tìm phần thực và phần ảo của số phức sau

$1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \ldots + (1+i)^{20}$

HD:

Áp dụng công thức tính tổng của CSN

Với $u_1 = 1; q = (1+i)$ và $n = 21$

Đs: phần thực -2^{10}, phần ảo $2^{10} + 1$.

Bài 5: Tìm phần thực và phần ảo của số phức z biết: $z^2 = -2 + 2\sqrt{3}\, i$

Bài 6: Cho số phức $z = x + yi$. Tìm phần thực và phần ảo của các số phức:

a. $u = z^2 - 2z + 4i$ b. $v = \dfrac{\bar{z}+i}{iz-1}$

Đs:

a. $x^2 - y^2 - 2x$ và $2(xy - y + 2)$ b. $\dfrac{-2xy}{x^2+(y+1)^2}$ và $\dfrac{y^2-x^2-1}{x^2+(y+1)^2}$

Bài 7: Hỏi với số nguyên dương n nào, số phức $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-3i}\right)^n$ là số thực, là số ảo?

Bài 8: Tìm phần thực và phần ảo của mỗi số phức sau:

c. $\dfrac{1}{2.i}\left(i^7 - \dfrac{1}{i^7}\right)$; d. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2 + (1-i)^{10} + (2+3i)(2-3i) + \dfrac{1}{i}$

Đs:

a. -1 và 0

Loại 2: Viết số phức dưới dạng đại số

Bài 1: Viết các số phức dưới dạng đại số

a. $z=\dfrac{(1+2i)^3-(1-i)^3}{(3+2i)^2-(2+i)^2}$

b. $z=\dfrac{5+i}{(1+i)(2-3i)}$

b. $z=2i^{10}+i^3$

d. $z=i^{2007}+i^{2008}$

Đs:

a. $z=\dfrac{44}{318}-\dfrac{5}{318}i$

b. $z=\dfrac{12}{3}+\dfrac{5}{13}i$

c. $z=-2-i$

d. $z=1-i$

Loại 3: Hãy biểu diễn số phức z

Bài 1: Cho số phức $z=m+(m-3)i,\ m\in R$

a. Tìm m để biểu diễn của số phức nằm trên đường phân giác thứ hai $y=-x$;

b. Tìm m để biểu diễn của số phức nằm trên hypebol $y=-\dfrac{2}{x}$;

c. Tìm m để khoảng cách của điểm biểu diễn số phức đến gốc toạ độ là nhỏ nhất.

Bài 2: Xét các điểm A, B, C trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức

$\dfrac{4i}{i-1};\ (1-i)(1+2i);\ \dfrac{2+6i}{3-i}$.

a. Chứng minh ABC là tam giác vuông cân;

b. Tìm số phức biểu diễn điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình vuông.

Bài 3: Tìm các số phức liên hợp với các số phức trên rồi biểu diễn chúng trên mặt phẳng phức

Bài 4: Cho số phức $z=a+bi$. Hỏi a, b phải thoả mãn điều kiện gì để

a. Điểm biểu diễn cúng nằm trong dải giữa 2 đường thẳng $x=-2$ và $x=2$

b. Điểm biểu diễn cúng nằm trong dải giữa 2 đường thẳng $y=-3i$ và $y=3i$

c. Điểm biểu diễn cúng nằm trong hình tròn tâm O, bán kính 2

Bài 5: Cho ABCD là hình bình hành với A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $1-i$, $2+3i$, $3+i$. Tìm số phức z có điểm biểu diễn là D.

Loại 4: Tìm môđun của số phức z

Bài 1: Tìm môđun và acgument của số phức

$$z=\left(\frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}\right)^{21}$$

Bài 2: Tính |z|, biết rằng:

a. $z=\dfrac{(1+i)^2\left(\sqrt{2}-i\right)}{\left(\sqrt{2}+i\right)(1-i)^2}$

b. $z=\dfrac{1}{2i}+\dfrac{3}{i}+\dfrac{6}{5i}$

c. $z=\dfrac{(2-i)(1+2i)(2-4i)}{2+3i}$ d. $z=(2-i)(1+2i)(3-4i)$

e. $z=\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ f. $z=\dfrac{1+\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}+i}$

Đs:

a. 1 b. $\dfrac{47}{10}$ c. $\dfrac{45}{\sqrt{13}}$ d. 25 e. 1 f. 1

Bài 3: Cho ba số phức x, y, z cùng có modun bằng 1. So sánh modun của các số $x+y+z$ *và* $xy+yz+zx$

Đs: $|x+y+z|=|xy+yz+zx|$

Loại 5: Tìm số phức liên hợp của số phức z

Bài 1: Tìm số phức nghịch đảo của số phức z biết

a. $z=3+4i$ b. $z=-3-2i$

Đs:

a. $\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{25}-\dfrac{4}{25}i$ b. $\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{13}+\dfrac{2}{13}i$

Loại 6: Sự bàng nhau của hai số phưc

Bài 1: Tìm hai số thực x, y thỏa mãn đẳng thức

a. $x(-1+4i)+y(1+2i)^3=2+9i$ b. $\dfrac{x+yi}{1-i}=3+2i$

c. $(1-i)x+(4+2i)y=1+3i$ d. $(3-2i)x+(5-7i)y=1-3i$

Đs:

b. $\begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}$ c. $\begin{cases}x=\dfrac{8}{11}\\y=\dfrac{7}{11}\end{cases}$ d. $\begin{cases}x=-\dfrac{5}{3}\\y=\dfrac{2}{3}\end{cases}$

Bài 2: Tìm hai số thực x, y sao cho $z=(2-3i)x+(1+4i)y$ là

a. Là số thực b. Là số thuần ảo c. Bằng 0 d. Bằng i

Đs:

a. $3x-4y=0$ b. $2x+y=0$ c. $x=y=0$ d. $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{11}\\y=\dfrac{2}{11}\end{cases}$

Bài 3: Tìm các số nguyên x, y sao cho số phức $z=x+iy$ thỏa mãn $z^3=18+26i$

Đáp số: $z = 3 + i$

Bài 4: Với điều kiện nào thì số phức $z = a + bi$ thỏa mãn:

a. $z=\bar{z}$ b. $z=-\bar{z}$ c. $z=-z$

Đs:

a. b = 0 b. a = 0 c. a = b = 0

Dạng 3: Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện cho trước

Bài 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2+2i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$

Đáp số: $|z|_{\max}=2\sqrt{2}+1 \Leftrightarrow z=\frac{4+\sqrt{2}}{2}-\frac{4+\sqrt{2}}{2}i$; $|z|_{\min}=2\sqrt{2}-1 \Leftrightarrow z=\frac{4-\sqrt{2}}{2}-\frac{4-\sqrt{2}}{2}i$

Bài 2: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=3$; $|z_2|=3$; $|z_1-z_2|=\sqrt{37}$. Tìm số phức $z=\frac{z_1}{z_2}$

Bài 3: Tìm số phức z thỏa mãn: $\bar{z}-\frac{20}{z}=1-3i$.

Bài 4: Với giá trị thực nào của x và y thì các số phức $z_1=9y^2-4-10xi^5$ và $z_2=8y^2+20i^{11}$ là liên hợp của nhau ?

Bài 5: Tìm các số nguyên n để số phức $z=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^n$ là một số thực

Bài 6: Tìm số phức z thỏa mãn $(z+1)^4+2(z+1)^2+(z+4)^2+1=0$

Bài 7: Cho các số phức z,z' thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}|z-2+3i|=2\\|z'+1|=1\end{cases}$. Tìm z,z' sao cho $|z-z'|$ nhỏ nhất

Bài 8: Cho biết $\left|z+\frac{1}{z}\right|=a$ .Tìm số phức có module lớn nhất , module nhỏ nhất

Đáp số: Các số phức cần tìm là : $z=\frac{i}{2}(a+\sqrt{a^2+4})$ và $z=\frac{i}{2}(a-\sqrt{a^2+4})$

Bài 9:

a. Trong các số z thoả mãn : $|2z-2+2i|=1$ hãy tìm số z có moidule nhỏ nhất

b. Trong các số z thoả mãn : $|z-5i|\le 3$ hãy tìm số z có acgumen dương nhỏ nhất

Bài 10: Tìm số phức z thỏa mãn : $|z|-2z=-1-8i$

Bài 11: Tìm số phức z thỏa mãn đồng thời: $\left|\frac{z-12}{z-8i}\right|=\frac{5}{3}$ và $\left|\frac{z-4}{z-8}\right|=1$.

Đs: Có hai số phức thỏa mãn $z=6+17i$ và $z=6+8i$

Bài 12: Tìm số phức z thỏa mãn $|z|=1$ và $\left|\frac{\bar{z}}{z}+\frac{z}{\bar{z}}\right|=1$

Dạng 4: Các bài toán về tập hợp điểm

Bài 1: Hãy tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn điều kiện:

a. $|z|<2$ b. $|z-1|\le 1$

c. $|z-1-i|<1$ d. $1\le|z+1-i|\le 2$

Đs:

a. Tập hợp là là các điểm nằm trong đường tròn tâm O bán kính $R = 2$
b. Tập hợp là hình tròn tâm $I(1;0)$ bán kính $R = 1$

c. Tập hợp là các điểm nằm trong đường tròn tâm $I(1;1)$ và bán kính $R = 1$

d. Tập hợp là các điểm là hình vành khăn tâm $I(-1;1)$ và có bán kính lớn bằng 2 và nhỏ bằng 1

Bài 2: Xác định tập hợp các điểm trên mặt phẳng biểu diễn số phức: $2|z-i| = |z-\overline{z}+2i|$.

Đs: Tập hợp là một Parabol $y = \frac{x^2}{4}$.

Bài 3: Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện sau: $|z-2\overline{z}+1-i| = |z+3|$

Bài 4: Tìm tập hợp các số phức z thỏa mãn một trong các điều kiện sau

a. $|z+2| = |i-z|$

b. $|z-4i| + |z+4i| = 10$

Đs:

a. Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn $AB: 4x+2y+3=0$

b. Tập hợp điểm M là đường Elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

Bài 5: Tìm tập hợp các điểm $M(x;y)$ trong mặt phẳng Oxy biểu diễn số phức z thỏa $\overline{z} + 4z = \left(\frac{5\sqrt{5}}{3} + 2i\right)|\overline{z}|$

Bài 6: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức số phức $\omega = (1+i\sqrt{3})z + 2$ biết rằng số phức z thoả mãn: $|z-1| \le 2$.

Bài 7: Xác đỉnh tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số z thỏa m điều kiện sau:

a. $(2-z)(i+\overline{z})$ là số ảo tùy ý

b. $|2z+1| = |z+i-3|$

Đs:

Bài 8: Tìm tập hợp những điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn:

a. $z+2i$ là số thực

b. $z-2+i$ là số thuần ảo

c. $z.\overline{z} = 9$

d. $\left|\frac{z-3i}{z+i}\right| = 1$ là số thực

e. $(2-z)(i+\overline{z})$ là số ảo tùy ý

f.

Bài 9: Tìm tập hợp những điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn:

a. $|z+3| = 1$

b. $|z+i| = |z-2-3i|$

c. $|z-2| + |z+2| = 10$

Bài 10: Hãy xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số z thoả mãn mỗi điều kiện sau:

a. $|z+1| < 1$

b. $1 < |z-i| < 2$

c. $|2i-2\overline{z}| = |2z-1|$

d. $|2iz-1| = 2|z+3|$

Bài 11: Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số z thỏa mãn mỗi điều kiện sau:

a. $|z+\overline{z}+3| = 4$

b. $|z-\overline{z}+1-i| = 2$

Đs:

a. $x=\frac{1}{2}$ và $x=-\frac{7}{2}$ b. $y=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

Bài 12: Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z}{z-i}\right|=k,$ (k là số thực dương cho trước).

Bài 13:

a. Tìm số phức z, biết $|z|=2\sqrt{5}$ và phần ảo của z bằng hai lần phần thực của nó.

b. Tìm hai số phức biết tổng của chúng bằng 2 và tích của chúng bằng 3.

c. d) Tìm số phức z biết $|z|=4$ và z là số thuần ảo.

d. Trên mặt phẳng Oxy , hãy tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn đẳng thức $|z|=3$

e. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn đẳng thức $|z+i|=2$.

Bài 14: Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $\left|z^2-\left(z.\bar{z}\right)^2\right|=4$.

Đs: Tập hợp điểm là hypebol $y=\frac{1}{x}$, $y=-\frac{1}{x}$.

Bài 15: Tìm số phức z sao cho $A=(z-2)(\bar{z}+i)$ là một số thực

Bài 16: Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện: |z| = 5 và $\frac{z+7i}{\bar{z}+1}$ là số thực

Bài 17: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số $\bar{z}-1-2i$ biết số phức z thay đổi thỏa mãn $|z+1+i|=1$

Dạng 5: Chứng minh tính chất của số phức

Bài 1: Các vectơ $\vec{u},\vec{u}'$ trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức z, z'.

a. Chứng minh rằng tích vô hướng $\vec{u}.\vec{u}'=\frac{1}{2}\left(\bar{z}.z'+z.\bar{z}'\right)$;

b. Chứng minh rằng $\vec{u},\vec{u}'$ vuông góc khi và chỉ khi $|z+z'|=|z-z'|$.

Bài 2: Chứng minh rằng với mọi số phức z, w, ta có $|z+w|\le|z|+|w|$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

HD:

Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức z, w, z + w. Ta có $|z|=OA, |w|=OB, |z+w|=OC$.

Từ OC ≤ OA + AC suy ra $|z+w|\le|z|+|w|$.

Hơn nữa OC = OA + AC khi và chỉ khi O, A, C thẳng hàng và A thuộc đoạn thẳng OC. Khi O ≠ A (hay z ≠ 0) điều đó có nghĩa là có số k ≥ 0 để $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{OA}$ tức là w = kz.

(Còn khi z = 0, rõ ràng $|z+w|=|z|+|w|$).

Vậy $|z+w|=|z|+|w|$ khi và chỉ khi z = 0 hoặc nếu $z\ne0$ thì tồn tại $k\in R_+$ để $w=kz$.

Bài 4: Chứng minh $z=\frac{(1-i)^{10}\left(\sqrt{3}+i\right)^5}{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{10}}$ là một số thực

Bài 5: Chứng minh rằng nếu $a+bi=(c+di)^{n}$ thì $a^2+b^2=(c^2+d^2)^n$

HD:

$a+bi=(c+di)^n\ |a+bi|=\left|(c+di)^n\right|$

$\Rightarrow |a+bi|^2=\left|(c+di)^n\right|^2=\left|(c+di)\right|^{2n}\Rightarrow a^2+b^2=(c^2+d^2)^n$

Bài 6: Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1^2+z_2^2=z_1z_2$. Chứng minh rằng $|z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|$

Bài 7: Cho $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Chứng minh rằng : $\left(\overline{z}\right)^3=1$.

Bài 8: Chứng minh $3(1+i)^{2010}=4i(1+i)^{2008}-4(1+i)^{2006}$

Bài 9: Cho hai số phức z, w. chứng minh: $\Leftrightarrow\ z.w=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=0\\ w=0\end{array}\right.$

Bài 10: Chứng minh rằng mọi số phức có môđun bằng 1 đều có thể viết dưới dạng $\dfrac{x+i}{x-i}$ với x là số thực mà ta phải xác định

Bài 11: Cho z và z' là hai số phức bất kì . Chứng minh rằng :

a. $\overline{(z+z')}=\overline{z}+\overline{z'}$

b. $\overline{(z-z')}=\overline{z}-\overline{z'}$

c. $\overline{z.z'}=\overline{z}.\overline{z'}$

d. $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}(z'\neq 0)$

e. $|z.z'|=|z|.|z'|$

f. $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|},\ z'\neq 0$

Bài 12: Các điểm A,B,C và A',B',C' trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số $1-i$, $2+3i$, $3+i$ và 3i, $3-2i$, $3+2i$.

Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Dạng 6: Giải phương trình bậc nhất với số phức

Bài 1: Giải các phương trình sau trên tập số phức

a. $\dfrac{2+i}{1-i}z=\dfrac{-1+3i}{2+i}$

b. $[(2-i)\overline{z}+3+i](iz+\dfrac{1}{2i})=0$

c. $z+2\overline{z}=2-4i$

d. $z^2-\overline{z}=0$

e. $z^2+|z|=0$

f. $z^2+|z|^2=0$

Đs:

a. $\dfrac{22}{25}+\dfrac{4}{25}i$

b. $-1+i;\dfrac{1}{2}$

c. $\dfrac{2}{3}+4i$

d. 0; -1; $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

e. $0;i;-i$

f. $bi\ (b\in R)$

Bài 2: Giải phương trình

a. $|z|-z=1+2i$

b. $|z|+z=2+i$

Đs:

a. $a=\frac{2}{3};b=-2$ b. $a=\frac{3}{4};\ b=1$

Bài 3 : Giải các phương trình sau

a. $(1+i)z+(2-i)(1+3i)=2+3i$

b. $2z+3i=7+8i$

c. $(1-3i)z+(4+3i)=7-5i$

d. $(1+i)z+3=2i-4z$

e. $\frac{z}{2+3i}-(1+2i)=5-6i$

B. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC VÀ CÁC LOẠI PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Dạng 1: Tìm căn bậc hai của số phức

Bài 1: Tìm căn bậc hai của các số phức sau:

a. $-5+12i$ b. $8+6i$ c. $33-56i$ d. $-3+4i$

Giải:

a. Gọi $z=x+iy$ là một căn bậc hai của $-5+12i$ tức là

$(x+iy)^2=-5+12i \Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy=-5+12i$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-5 \\ 2xy=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-5 \\ x^2+y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4 \\ y^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=\pm 3 \end{cases}$$

Do $b=12>0 \Rightarrow x,y$ cùng dấu do đó $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$

Vậy $-5+12i$ có 2 căn bậc hai là $z_1=2+3i$ và $z_2=-2-3i$.

b. Tương tự gọi $z=x+iy$ là một căn bậc hai của $8+6i$ tức là

$(x+iy)^2=8+6i \Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy=8+6i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=8 \\ 2xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=8 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=9 \\ y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 3 \\ y=\pm 1 \end{cases}$$

Do $b=6>0 \Rightarrow x,y$ cùng dấu do đó $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$

Vậy $8+6i$ có 2 căn bậc hai là $3+i$ và $-3-i$.

c. Gọi $z=x+iy$ là một căn bậc hai của $33-56i$ tức là

$(x+iy)^2=33-56i \Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy=33-56i$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=33 \\ 2xy=-56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=33 \\ x^2+y^2=65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=49 \\ y^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 7 \\ y=\pm 4 \end{cases}$$

Do $b=-56<0 \Rightarrow x,y$ trái dấu do đó $\begin{cases} x=7 \\ y=-4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-7 \\ y=4 \end{cases}$

Vậy 2 căn bậc hai của $33-56i$ là $7-4i$ và $-7+i4$.

d. Gọi $z=x+iy$ là một căn bậc hai của $-3+4i$ tức là

$(x+iy)^2=-3+4i \Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy=-3+4i$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-3 \\ 2xy=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 2 \end{cases}$

Do $b=4>0 \Rightarrow x,y$ cùng dấu do đó $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

Vậy 2 căn bậc hai của $-3+4i$ là $1+2i$ và $-1-2i$.

Bài 2: Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức sau:

a. $4+6\sqrt{5}\,i$ b. $-1-2\sqrt{6}i$

Giải:

a. Giả sử $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ là một căn bậc hai của $w=4+6\sqrt{5}i$

Khi đó: $z^2=w \Leftrightarrow (x+yi)^2=4+6\sqrt{5}i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=4 \\ 2xy=6\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3\sqrt{5}}{x} & (1) \\ x^2-\dfrac{45}{x^2}=4 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow$

(2) $\Leftrightarrow x^4-4x^2-45=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$.

$x=3 \Rightarrow y=\sqrt{5}$

$x=-3 \Rightarrow y=-\sqrt{5}$

Vậy số phức $w=4+6\sqrt{5}\,i$ có hai căn bậc hai là: $z_1=3+\sqrt{5}\,i$ và $z_2=-3-\sqrt{5}\,i$

b. Giả sử $z=x+yi$ (x, y thuộc R) là một căn bậc hai của $w=-1-2\sqrt{6}\,i$

Khi đó: $z^2=w \Leftrightarrow (x+yi)^2=-1-2\sqrt{6}i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-1 \\ 2xy=-2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-\sqrt{6}}{x} & (1) \\ x^2-\dfrac{6}{x^2}=-1 & (2) \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow x^4+x^2-6=0 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

$x=\sqrt{2} \Rightarrow y=-\sqrt{3}$

$x=-\sqrt{2} \Rightarrow y=\sqrt{3}$

Vậy số phức $w=4+6\sqrt{5}\,i$ có hai căn bậc hai là: $z_1=\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i$ và $z_2=-\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$

Dạng 2: Phương trình bậc hai

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a. $x^2-(3+4i)x+5i-1=0;$ (1) b. $x^2+(1+i)x-2-i=0;$ (2)

Giải:

a. Ta có $\Delta=(3+4i)^2-4(5i-1)=-3+4i$. Vậy Δ có hai căn bậc hai là 1+ 2i và −1 − 2i.

Do đó pt (1) có hai nghiệm là: $x_1=\dfrac{3+4i+1+2i}{2}=2+3i;\ x_2=\dfrac{3+4i-1-2i}{2}=1+i$

b. Ta có $\Delta=(1+i)^2-4(-i-2)=8+6i$. Vậy Δ có hai căn bậc hai là 3 + i và −3 − i.

Do đó pt (2) có hai nghiệm là: $x_1 = \dfrac{-1-i+3+i}{2} = 1; x_2 = \dfrac{-1-i-3-i}{2} = -2-i$

Chú ý:
PT (2) có thể dùng nhẩm nghiệm nhờ a + b + c = 0

Bài 2: Giải các phương trình sau:
a. $3x^2+x+2=0$ (1) b. $x^2+x+1=0$ (2) c. $x^3-1=0$ (3)

Giải:
a. Ta có $\Delta = -23 = -23\,i^2 < 0$ nên ta có hai căn bậc hai của Δ là:
$i\sqrt{23}$ và $-i\sqrt{23}$. Từ đó nghiệm của pt (1) là: $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{23}}{6}$

b. Ta có $\Delta = -3 = -3i^2 < 0$ nên (2) có các nghiệm là: $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

c. Ta có (3) $\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2+x+1=0;\ (*) \end{array}\right.$

Theo b. Pt (*) có hai nghiệm là $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Từ đó ta có các nghiệm của pt (3) là: $x = 1; x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$
(Các nghiệm của pt (3) được gọi là căn bậc ba của 1).

Bài 3: Lập phương trình bậc hai có các nghiệm là: $\alpha = 4+3i; \beta = -2+5i$

HD:
Theo bài ra ta có: $\alpha + \beta = 2+8\mathrm{i}; \alpha.\beta = -23+14\mathrm{i}.$
kết quả pt bậc hai cần lập là: $x^2 - (2+8i)x + 14i - 23 = 0$

Bài 4: Tìm m để phương trình: $x^2 + mx + 3i = 0$ có tổng bình phương 2 nghiệm bằng 8.

Giải:
Theo bài ra ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 8 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 8\,(1).$

Theo Vi−et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = 3i \end{cases}$

Thay vào (1) ta được $m^2 - 6i = 8 \Leftrightarrow m^2 = 8+6i \Rightarrow m$ là một căn bậc hai của $8+6i$.
Vậy: có 2 giá trị của m là: 3 + i và −3 − i.

Bài 5: Trên tập số phức , tìm B để phương trình bậc hai $z^2 + Bz + i = 0$ có tổng bình phương hai nghiệm bằng $-4i$.

Giải:
Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho và $B = a+bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.
Theo đề phương trình bậc hai $z^2 + Bz + i = 0$ có tổng bình phương hai nghiệm bằng $-4i$.
nên ta có : $z_1^2 + z_2^2 = (z_1+z_2)^2 - 2z_1z_2 = S^2 - 2P = (-B)^2 - 2i = -4i$ hay $B^2 = -2i$ hay

$(a+bi)^2 = -2i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = -2i$ Suy ra : $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -2 \end{cases}$.

Hệ phương trình có nghiệm (a;b) là $(1;-1), (-1;1)$
Vậy : $B = 1-i; \mathrm{B} = -1+i$

Bài 6: Cho $z_1; z_2$ là 2 nghiệm pt $\left(1+i\sqrt{2}\right)z^2-(3+2i)z+1-i=0$

Không giải pt hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

a. $A = z_1^2 + z_2^2$; b. $B = z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2$; c. $C = \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$

Giải:

Theo Vi–et ta có: $\begin{cases} z_1+z_2 = \dfrac{3+2i}{1+i\sqrt{2}} = \dfrac{3+2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{2-3\sqrt{2}}{3}i \\ z_1z_2 = \dfrac{1-i}{1+i\sqrt{2}} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}i \end{cases}$

a. Ta có $A = \left(z_1+z_2\right)^2 - 2z_1z_2 = \left(\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{2-3\sqrt{2}}{3}i\right)^2 - 2\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}i\right) = \dfrac{-11+30\sqrt{2}}{9} - \dfrac{6+4\sqrt{2}}{9}i$

b. $B = z_1z_2\left(z_1+z_2\right) = \left(\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{2-3\sqrt{2}}{3}i\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}i\right) = \dfrac{-5-2\sqrt{2}}{9} + \dfrac{1-10\sqrt{2}}{9}i$

c. Ta có $C = \dfrac{z_1^2+z_2^2}{z_1z_2} = \dfrac{A}{\dfrac{1-\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}i} = \dfrac{-6+26\sqrt{2}\,i}{18}$.

Bài 7: Giải phương trình nghiệm phức trên tập số phức

a. $z^2 - 8(1-i)z + 63 - 16i = 0$

b. $\left(2-3i\right)z^2 + \left(4i-3\right)z + 1 - i = 0$

HD:

a. Ta có $\Delta' = 16(1-i)^2 - (63-16i) = -63-16i = (1-8i)^2$

Từ đó ta tìm ra hai nghiệm $z_1 = 5-12i$; $z_2 = 3+4i$.

b. Ta có $\left(2-3i\right) + \left(4i-3\right) + 1 - i = 0$

$z_1 = 1; z_2 = -\dfrac{1+5i}{13}$

Bài 8: (CĐ – 2010) Giải phương trình $z^2 - \left(1+i\right)z + 6 + 3i = 0$ trên tập hợp các số phức.

Giải:

Phương trình có biệt thức $\Delta = \left(1+i\right)^2 - 4\left(6+3i\right) = -24-10i = \left(1-5i\right)^2$

Phương trình có hai nghiệm là: $z = 1-2i$ và $z = 3i$.

Bài 9: (CĐ – 2009) Giải phương trình sau trên tập hợp các số phức: $\dfrac{4z-3+7i}{z-i} = z-2i$

Giải:

Điều kiện: $z \neq -1$

Phương trình đã cho tương đương với $z^2-(4+3i)z+1+7i=0$

Phương trình có biệt thức $\Delta=(4+3i)^2-4(1+7i)=3-4i=(2-i)^2$

Phương trình có hai nghiệm là: $z=\dfrac{4+3i-2+i}{2}=1+2i$ và $z=\dfrac{4+3i+2-i}{2}=3+i$.

Bài 10: Giải phương trình nghiệm phức : $\bar{z}+\dfrac{25}{z}=8-6i$

Giải:

Giả sử $z=a+bi$ với ; a,b $\in$ R và a,b không đồng thời bằng 0.

Khi đó $\bar{z}=a-bi$; $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$

Khi đó phương trình $\bar{z}+\dfrac{25}{z}=8-6i \Leftrightarrow a-bi+\dfrac{25(a-bi)}{a^2+b^2}=8-6i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2+b^2+25)=8(a^2+b^2) & (1) \\ b(a^2+b^2+25)=6(a^2+b^2) & (2) \end{cases}$.

Lấy (1) chia (2) theo vế ta có $b=\dfrac{3}{4}a$ thế vào (1) ta được a = 0 hoặc a = 4

Với a = 0 $\Rightarrow$ b = 0 (Loại)

Với a = 4 $\Rightarrow$ b = 3 . Ta có số phức $z = 4 + 3i$.

Bài 11: Tìm các số thực b, c để phương trình $z^2 + bz + c = 0$ nhận số phức z = 1 + i làm một nghiệm.

Giải:

Vì z = 1 + i là một nghiệm của phương trình: $z^2 + bx + c = 0$ (b, c $\in$ R), nên ta có :

$(1+i)^2+b(1+i)+c=0 \Leftrightarrow b+c+(2+b)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ 2+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=2 \end{cases}$

Bài 12: Giải các pt sau: $z^2+\bar{z}=0$

Giải:

Giả sử $z=x+yi$, x,y $\in \mathbb{R}$

Ta có $z^2+\bar{z}=0 \Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi+x-yi=0 \Leftrightarrow (x^2-y^2+x)+(2xy-y)i=0+0i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+x=0 \\ 2xy-y=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0 \\ y(2x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ 2x - 1 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2 = \dfrac{3}{4} \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right. \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy: Có bốn số phức cần tìm là: $z_1 = 0,\ \ z_2 = -1,\ \ z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Bài 13: Tìm m để pt $z^2 + mz + 3i = 0$ có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa $z_1^2 + z_2^2 = 8$.

Giải:

Ta có: $z_1^2 + z_2^2 = 8 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 - 2z_1.z_2 = 8$

Với $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = -m,\ \ z_1.z_2 = \frac{c}{a} = 3i$

Suy ra: $z_1^2 + z_2^2 = 8 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 - 2z_1.z_2 = 8 \Leftrightarrow (-m)^2 - 2.3i = 8 \Leftrightarrow m^2 = 8 + 6i = (3+i)^2 \Leftrightarrow m = \pm(3+i)$.

Bài 14: Cho số phức z thoả mãn $z^2 - 2z + 3 = 0$. Gọi $f(z)$ là số phức xác định bởi $f(z) = z^{17} - z^{15} + 6z^{14} + 3z^2 - 5z + 9$. Tính mô đun của $f(z)$

Giải:

Ta đặt $z^2 - 2z + 3 = 0$ (1)

(1) có $\Delta = -2 < 0$ nên (1) có 2 nghiệm phức là $\left[\begin{array}{l} z_1 = 1 - i\sqrt{2} \\ z_2 = 1 + i\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow |z_1| = |z_2| = \sqrt{3}$

$f(z) = z^{17} - z^{15} + 6z^{14} + 3z^2 - 5z + 9 = z^{15}(z^2 - 2z + 3) + 2z^{14}(z^2 - 2z + 3) + 3(z^2 - 2z + 3) + z$

nếu $z = z_1 \Rightarrow f(z_1) = z_1 \Rightarrow |f(z_1)| = |z_1| = \sqrt{3}$

nếu $z = z_2 \Rightarrow f(z_2) = z_2 \Rightarrow |f(z_2)| = |z_2| = \sqrt{3}$

Vậy $|f(z)| = \sqrt{3}$

Dạng 3: Phương trình quy về phương trình bậc hai và phương trình bậc cao

Phương pháp 1: Phương pháp phân tích thành nhân tử:

Bài 1: Cho phương trình sau:

$$z^3+(2-2i)z^2+(5-4i)z-10i=0\ (1)$$

a. Chứng minh rằng (1) nhận một nghiệm thuần ảo.

b. Giải phương trình (1).

Giải:

a. Đặt z = yi với y $\in$ R

Phương trình (1) có dạng: $(iy)^3+(2i-2)(yi)^2+(5-4i)(yi)-10\text{i}=0$

$\Leftrightarrow -iy^3-2y^2+2iy^2+5iy+4y-10i=0=0+0i$

đồng nhất hoá hai vế ta được:

$\begin{cases}-2y^2+4y=0\\ -y^3+2y^2+5y-10=0\end{cases}$ giải hệ này ta được nghiệm duy nhất y = 2

Vậy phương trình (1) có nghiệm thuần ảo z = 2i.

b. Vì phương trình (1) nhận nghiệm 2i

$\Rightarrow$ vế trái của (1) có thể phân tích dưới dạng:

$$z^3+(2-2i)z^2+(5-4i)z-10i=(z-2i)(z^2+az+b)\ (a,\ b\in R)$$

đồng nhất hoá hai vế ta giải được a = 2 và b = 5.

$$\Rightarrow (1)\Leftrightarrow (z-2i)(z^2=2z+5)=0\Leftrightarrow \begin{cases}z=2i\\ z^2+2z+5=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}z=2i\\ z=-1-2i\\ z=-1+2i\end{cases}$$

Vậy phương trình (1) có 3 nghiệm.

Bài 2: Giải các phương trình:

1. $z^3 - 27 = 0$
2. $z^3 = 18 + 26i$, trong đó z = x + yi ; x,y $\in$ Z

Giải:

1. $z^3-27=0\Leftrightarrow (z-1)(z^2+3z+9)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=1\\ z^2+3z+9=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=1\\ z_{2,3}=\dfrac{-3\pm 3\sqrt{3}i}{2}\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

2. Ta có: $(x+yi)^3=x^3-3xy^2+(3x^2y-y^3)i\ =18+26i$

Theo định nghĩa hai số phức bằng nhau, ta được: $\begin{cases}x^3-3xy^2=18\\ 3x^2y-y^3=26\end{cases}$

Từ hệ trên, rõ ràng x $\neq$ 0 và y $\neq$ 0.

Đặt y = tx , hệ $\Rightarrow 18(3x^2y-y^3)=26(x^3-3xy^2)$

$\Rightarrow 18(3t-t^3)=26(1-3t^2)\Leftrightarrow 18t^3-78t^2-54t+26=0\Leftrightarrow (3t-1)(3t^2-12t-13)=0.$

Vì $x,\ y\in Z\Rightarrow t\in Q\Rightarrow t=\dfrac{1}{3}\Rightarrow x=3$ và $y=1\Rightarrow z=3+i.$

Bài 3:
1. Tìm các số thực a, b để có phân tích: $z^3 + 3z^2 + 3z - 63 = (z - 3)(z^2 + az + b)$
2. Giải phương trình: $z^3 + 3z^2 + 3z - 63 = 0$
3. Cho phương trình: $z^3 - 5z^2 + 16z - 30 = 0$ (1), gọi z_1, z_2, z_3 lần lượt là 3 nghiệm của phương trình (1) trên tập số phức. Tính giá trị biểu thức: $A = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

Giải:

1. Giả thiết $\Leftrightarrow z^3 + 3z^2 + 3z - 63 = z^3 + (a-3)z^2 + (b-3a)z - 3b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 3 = 3 \\ b - 3a = 3 \\ 3b = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 21 \end{cases}$$

2. Áp dụng phần 1. ta có: $z^3 + 3z^2 + 3z - 63 = 0 \Leftrightarrow (z-3)(z^2 + 6z + 21) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 3 \\ z = -3 + 2\sqrt{3}i \\ z = -3 - 2\sqrt{3}i \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

3. $z^3 - 5z^2 + 16z - 30 = 0$

có 3 nghiệm là: $z_1 = 3; z_2 = 1 + 3i; z_3 = 1 + 3i$

$\Rightarrow A = z_1^2 + z_2^2 +_3^2 = -7$

Bài 4: Giải phương trình: $z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = 0 \; (1)$

Giải:

Do tổng tất cả các hệ số của phương trình (1) bằng 0 nên (1) có nghiệm z = 1.

$(1) \Leftrightarrow (z-1)(z^3 - 3z^2 + 4z - 12) = 0 \Leftrightarrow (z-1)\;\;(z-3)(z^2+4) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = 3 \\ z^2 + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = 3 \\ z = 2i \\ z = -2i \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Bài 5: Giải phương trình: $z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = 0$

Giải:

Phân tích đa thức vế trái thành nhân tử ta có:

$$z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z-3)(z^2+4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = 3 \\ z = \pm 2i \end{array}\right.$$

Bài 6: Giải phương trình $2z^3 - 5z^2 + 3z + 3 + (2z+1)i = 0$, biết rằng phương trình có nghiệm thực

Giải:

Phương trình có nghiệm thực $\begin{cases} 2z^3 - 5z^2 + 3z + 3 \\ 2z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = -\dfrac{1}{2}$ tức là phương trình có một nghiệm $z = -\dfrac{1}{2}$

Phương trình $(2z+1)\left(z^2-3z+3+i\right)=0$ giải phương trình này ta được

$z=-\frac{1}{2};\ z=2-i;\ z=1+i$

Bài 7: Giải phương trình $z^3+(1-2i)z^2+(1-i)z-2i=0$, biết rằng phương trình có một nghiệm thuần ảo

Giải:

Giả sử phương trình có một nghiệm thuần ảo $z=bi$, thay vào phương trình ta được

$(bi)^3+(1-2i)(bi)^2+(1-i)(bi)-2i=0 \Leftrightarrow \left(b-b^2\right)+\left(-b^3+2b^2+b-2\right)i=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b-b^2=0 \\ -b^3+2b^2+b-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow b=1 \Leftrightarrow z=i$$

Vậy phương trình tương đương với $(z-i)\left[z^2+(1-i)z+2\right]=0$... giải phương trình này sẽ được nghiệm

Phương pháp 2: Phương pháp đặt ẩn phụ

Bài 1: Giải phương trình: $\left(z^2+z\right)^2+4\left(z^2+z\right)-12=0$

Giải:

Đặt $t=z^2+z$, khi đó phương trình đã cho có dạng:

$$\Leftrightarrow t^2+4t-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-6 \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2+z-6=0 \\ z^2+z-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\frac{-1+\sqrt{23}i}{2} \\ z=\frac{-1-\sqrt{23}i}{2} \\ z=1 \\ z=-2 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Bài 2: Giải phương trình: $\left(z^2+3z+6\right)^2+2z\left(z^2+3z+6\right)-3z^2=0$

Giải:

Đặt $t=z^2+3z+6$ phương trình đã cho có dang:

$$t^2+2zt-3z^2=0 \Leftrightarrow (t-z)(t+3z)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=z \\ t=-3z \end{array}\right.$$

- Với $t=z \Leftrightarrow z^2+3z+6-z=0 \Leftrightarrow z^2+2z+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1+\sqrt{5}i \\ z=-1-\sqrt{5}i \end{array}\right.$

- Với $t=-3z \Leftrightarrow z^2+3z+6+3z=0 \Leftrightarrow z^2+6z+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-3+\sqrt{3} \\ z=-3-\sqrt{3} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Bài 3: Cho phương trình: $z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0 \ (1)$

a. Bằng cách đặt $y = z + \dfrac{1}{z}$ hãy đưa phương trình về dạng: $y^2 - 2y - 3 = 0$.

b. Từ đó giải (1)

Giải:

Do $z = 0$ không là nghiệm của (1) $\Rightarrow$ chia hai vế của phương trình cho z^2 ta được:

$z^2 - 2z - 1 - 2\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} = 0$

Đặt $y = z + \dfrac{1}{z} \Rightarrow$ phương trình có dạng: $y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = 3 \end{array}\right.$

- Với $y = -1 \Rightarrow z + \dfrac{1}{z} = -1 \Leftrightarrow z = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

- Với $y = 3 \Rightarrow z + \dfrac{1}{z} = 3 \Leftrightarrow z = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm

Bài 4: Giải phương trình: $z^4 - z^3 + \dfrac{z^2}{2} + z + 1 = 0 \qquad (1)$

Giải:

Do $z = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1) nên:

(1) $\Leftrightarrow z^2 - z + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} = 0$

$\Leftrightarrow \left(z - \dfrac{1}{z}\right)^2 - \left(z - \dfrac{1}{z}\right) + \dfrac{5}{2} = 0$

Đặt $y = z + \dfrac{1}{z} \Rightarrow$ pt có dạng: $\Leftrightarrow y^2 - y + \dfrac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1+3i}{2} \\ y = \dfrac{1-3i}{2} \end{array}\right.$

- Với $y = \dfrac{1+3i}{2} \Rightarrow z - \dfrac{1}{z} = \dfrac{1+3i}{2} \Leftrightarrow 2z^2 - (1+3i)z - 2 = 0 \ (2)$

Ta có : $\Delta = (1+3i)^2 + 16 = 8 + 6i = (3+i)^2$

$\Rightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm: $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

- Với $y = \dfrac{1-3i}{2} \Rightarrow z - \dfrac{1}{z} = \dfrac{1-3i}{2} \Leftrightarrow 2z^2 - (1-3i)z - 2 = 0 \ (3)$

Ta có : $\Delta = (1-3i)^2 + 16 = 8 - 6i = (3-i)^2$

$\Rightarrow$ phương trình (3) có 2 nghiệm: $z_3 = 1 - i$ và $z_4 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Bài 5: Giải phương trình: $z^4 - 6z^2 + 25 = 0 \quad (1)$

Giải:

Đặt $z^2 = t$. Khi đó (1) có dạng: $t^2 - 6t + 25 = 0 \ (2)$.

Ta có: $\Delta' = -16 = 16.i^2 < 0$ nên pt (2) có hai nghiệm là $t = 3 \pm 4i$.

Mặt khác $3 + 4i$ có hai căn bậc hai là: $2 + i$ và $-2 - i$ còn

$3 - 4i$ có hai căn bậc hai là: $2 - i$ và $-2 + i$

Vậy: pt (1) có 4 nghiệm là: $z_1 = 2 + i;\ z_2 = -2 - i;\ z_3 = 2 - i;\ z_4 = -2 + i.$

Bài 6: Giải phương trình (ẩn z) trên tập số phức: $\left(\frac{z+i}{i-z}\right)^3 = 1.$

Giải:

Điều kiện: $z \neq i$

Đặt $w = \frac{z+i}{i-z}$ ta có phương trình: $w^3 = 1 \Leftrightarrow (w-1)(w^2 + w + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} w = 1 \\ w^2 + w + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} w = 1 \\ w = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ w = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

- Với $w = 1 \Rightarrow \frac{z+i}{i-z} = 1 \Leftrightarrow z = 0$

- Với $w = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{z+i}{i-z} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (1 + i\sqrt{3})z = -\sqrt{3} - 3i \Leftrightarrow z = -\sqrt{3}$

- Với $w = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{z+i}{i-z} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (1 - i\sqrt{3})z = \sqrt{3} - 3i \Leftrightarrow z = \sqrt{3}$

Vậy pt có ba nghiệm $z = 0; z = \sqrt{3}$ và $z = -\sqrt{3}$.

Bài 7: Giải phương trình: $\left(z^2 + 3z + 6\right)^2 + 2z\left(z^2 + 3z + 6\right) - 3z^2 = 0 \quad (*)$

Giải:

Đặt: $z^2 + 3z + 6 = u \Rightarrow (*) \Leftrightarrow u^2 + 2zu - 3z^2 = 0 \Leftrightarrow (u - z)(u + 3z) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = z \\ u = -3z \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 + 3z + 6 = z \\ z^2 + 3z + 6 = -3z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 + 2z + 6 = 0 \\ z^2 + 6z + 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} z_1 = -1 - i\sqrt{5} \\ z_2 = -1 + i\sqrt{5} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} z_3 = -3 - \sqrt{3} \\ z_4 = -3 + \sqrt{3} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Bài 8: Giải phương trình: $(z^2 - z)(z + 3)(z + 2) = 10 \quad (z \in C)$

Giải:

PT $\Leftrightarrow z(z+2)(z-1)(z+3)=10 \Leftrightarrow (z^2+2z)(z^2+2z-3)=0$

Đặt $t=z^2+2z$. Khi đó phương trình trở thành $t^2-3t-10=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1\pm i \\ z=-1\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có các nghiệm: $z=-1\pm\sqrt{6}$; $z=-1\pm i$

Bài 9: Giải phương trình tập số phức: $z^4+2z^3-z^2+2z+1=0$

Giải :

Phương trình $z^4+2z^3-z^2+2z+1=0 \Leftrightarrow z^2\left[(z^2+\frac{1}{z^2})+2(z+\frac{1}{z})-1\right]=0 \Leftrightarrow (z^2+\frac{1}{z^2})+2(z+\frac{1}{z})-1=0$

(z = 0 không là nghiệm của phương trình)

Đặt $w=z+\frac{1}{z}$; phương trình trên trở thành: $w^2+2w-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} w=1 \\ w=-3 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow z^2-z+1=0 \Leftrightarrow z=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2} \\ z+\frac{1}{z}=-3 \Leftrightarrow z^2+3z+1=0 \Leftrightarrow z=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có bốn nghiệm: $z=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$; $z=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

Bài 10: Tìm các số thực a, b, c để có: $z^3-2(1+i)z^2+4(1+i)z-8i=(z-ai)(z^2+bz+c)$.
Tìm môđun của các nghiệm đó.

HD:

Cân bằng hệ số ta được a = 2, b = –2, c = 4

Từ đó giải phương trình: $z^3-2(1+i)z^2+4(1+i)z-8i=0$ trên tập số phức.

Phương trình $\Leftrightarrow (z-2i)(z^2-2z+4)=0 \Leftrightarrow z=2i;\ z=1+\sqrt{3}i;\ z=1-\sqrt{3}i \Leftrightarrow |z|=2$.

Dạng 3: Giải hệ phương trình:

Bài 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} z_1^2+z_2^2=5+2i & (1) \\ z_1+z_2=4-i & (2) \end{cases}$

Giải:

Từ (2) ta có $z_1^2+z_2^2+2z_1z_2=15-8i$.

Kết hợp với (1) ta có $z_1z_2=5-5i$

Vậy ta có hệ phương trình: $\begin{cases} z_1+z_2=4-i \\ z_1z_2=5-5i \end{cases}$

Do đó z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2-(4-i)z+5-5i=0$. Ta có $\Delta=-5+12i$

Nên Δ có hai căn bậc hai là: 2 + 3i và −2 − 3i.

Vậy ta có $\begin{cases} z_1 = \dfrac{4-i+2+3i}{2} = 3+i \\ z_2 = \dfrac{4-i-2-3i}{2} = 1-2i \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} z_1 = 1-2i \\ z_2 = 3+i \end{cases}$.

Bài 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} z - \mathrm{w} = i \\ iz - \mathrm{w} = 1 \end{cases}$

Giải:

Coi i như 1 tham số ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ i & -1 \end{vmatrix} = -1+i\,;\ D_z = \begin{vmatrix} i & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -i+1 \quad \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{D}{D_x} = -1 \\ \mathrm{w} = \dfrac{D}{D_y} = -1-i \end{cases} \text{ và } D_{\mathrm{w}} = \begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Bài 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} z - \mathrm{w} - z\mathrm{w} = 8 \\ z^2 + \mathrm{w}^2 = -1 \end{cases}$

Giải:

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} z - \mathrm{w} - z\mathrm{w} = 8 \\ (z-\mathrm{w})^2 + 2z\mathrm{w} = -1 \end{cases}$

Đặt: $\begin{cases} u = z - \mathrm{w} \\ \mathrm{v} = z\mathrm{w} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - v = 8 \\ u^2 + 2v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - 8 = v \\ u^2 + 2u - 15 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = -5 \\ v = -13 \end{cases} \Rightarrow X^2 + 5X + 13 = 0 \Leftrightarrow (z;\mathrm{w}) = \left(\dfrac{\pm 5 + 3i\sqrt{3}}{2}; \dfrac{\mp 5 + 3i\sqrt{3}}{2}\right) \\ \begin{cases} u = 3 \\ v = -5 \end{cases} \Rightarrow X^2 - 3X - 5 = 0 \Leftrightarrow (z;\mathrm{w}) = \left(\dfrac{3 \pm \sqrt{14}}{2}; \dfrac{3 \mp \sqrt{14}}{2}\right) \end{array}\right.$$

Bài 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 \\ y - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \quad (x, y \in R)$

Giải:

Từ hệ suy ra: $x + yi + \dfrac{(3x-y) - (x+3y)i}{x^2+y^2} = 3 \Rightarrow x + yi + \dfrac{3(x-yi)}{x^2+y^2} - \dfrac{i(x-yi)}{x^2+y^2} = 3$

Đặt $z = x + yi$ ta được PT ẩn $z \in C$: $z + \dfrac{(3-i)\overline{z}}{|z|^2} = 3 \Leftrightarrow z + \dfrac{(3-i)}{z} = 3$

Giải PT bậc hai tìm được $z = 2+i$ và $z = 1-i$.

Từ đó tìm ra 2 nghiệm của hệ là $(x, y) = (2,1); (1,-1)$.

Bài 5: Giải hệ phương trình 2 ẩn z và w:

$$\begin{cases} z + w = 3(1+i) & (1) \\ z^3 + w^3 = 9(-1+i) & (2) \end{cases}$$

Giải:

Từ (2) ta có: $\left(z+w\right)^3 - 3zw\left(z+w\right) = 9\left(-1+i\right)$ $\left(3\right)$

Thay (1) vào (3) ta được: $27\left(1+i\right)^3 - 9zw\left(1+i\right) = 9\left(-1+i\right)$

$\Rightarrow 3\left(1+3i+3i^2+i^3\right) - zw\left(1+i\right) = -1+i \Rightarrow zw = \dfrac{-5+5i}{1+i} = 5i$

Vậy ta có hệ phương trình: $\begin{cases} z + w = 3(1+i) \\ z.w = 5i \end{cases}$

Theo định lý Viet $\Rightarrow$ z, w là các nghiệm của phương trình: $t^2 - 3\left(1+i\right) + 5i = 0$ $\left(4\right)$

Ta có: $\Delta = -2i = \left(1-\ i\right)^2$

$\Rightarrow$ Phương trình (4) có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} t = 2+i \\ t = 1+2i \end{array}\right.$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm (z;w) là $\left(2+i;1+2i\right)$ và $\left(1+2i;2+i\right)$

Bài 6: Giải hệ phương trình 2 ẩn z và w:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1 & (1) \\ z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 1 & (2) \\ z_1z_2z_3 = 1 & (3) \end{cases}$$

Giải:

Ta có z_1, z_2, z_3 là các nghiệm của phương trình: $\left(z - z_1\right)\left(z - z_2\right)\left(z - z_3\right) = 0$

$\Leftrightarrow z^3 - \left(z_1 + z_2 + z_3\right)z^2 + \left(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1\right)z - z_1z_2z_3 = 0$

$\Leftrightarrow z^3 - z^2 + z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \text{ và } z = \pm i$

Vậy hệ phương trình đã cho có 6 nghiệm (là hoán vị của bộ ba số 1, i và –i)

Bài 7: Giải hệ phương trình sau trong tập số phức: $\begin{cases} a^2 + a - \dfrac{6}{a^2+a} = 5 \\ a^2b^2 + ab^2 + b\left(a^2+a\right) - 6 = 0 \end{cases}$

Giải:

Điều kiện: $a^2 + a \neq 0$

Từ (1) $\Leftrightarrow (a^2+a)^2 - 5(a^2+a) - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 + a = -1 \\ a^2 + a = 6 \end{array}\right.$

Khi $a^2 + a = -1 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\ a = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} \end{array}\right.$ thay vào (2)

$\Rightarrow -b^2 - b - 6 = 0 \Rightarrow b^2 + b + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = \dfrac{-1-\sqrt{23}.i}{2} \\ b = \dfrac{-1+\sqrt{23}.i}{2} \end{array}\right.$

Khi $a^2 + a = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -3 \\ a = 2 \end{array}\right.$

Thay vào (2)

$\Rightarrow 6b^2 + 6b - 6 = 0 \Leftrightarrow b^2 + b - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ b = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy hệ pt có nghiệm (a, b) là:

$\left(\dfrac{-1-\sqrt{23}i}{2};\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right),\left(\dfrac{-1-\sqrt{23}i}{2};\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right);\left(\dfrac{-1+\sqrt{23}i}{2};\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right),\left(\dfrac{-1+\sqrt{23}i}{2};\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right);$

$\left(-3;\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(-3;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right),\left(2;\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(2;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$

Bài tập tự giải:

Bài 1: Giải phương trình bậc 2 sau trong tập hợp các số phức
$z^2 - 2(2-i)z + 6 - 8i = 0.$

Bài 2: Tìm các số thực b, c để phương trình $z^2 + bz + c = 0$ nhận số phức $z = 1+i$ làm một nghiệm.
Đs:
Vì $z = 1+i$ là một nghiệm của phương trình: $z^2 + bz + c = 0$ nên
$(1+i)^2 + b(1+i) + c = 0 \Leftrightarrow b + c + (2+b)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ 2 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$

Bài 3: Cho các số phức $w_1 = 1 + 2i,\ w_2 = 3 - 4i.$ Xác định các số phức z khác 0, đồng thời thoả mãn các điều kiện $w_1.z$ là số thực và $\left|\dfrac{w_2}{z}\right| = 1$, từ đó lập phương trình bậc hai có nghiệm là các số số phức đã tìm được?

Bài 4: Cho số phức z là một nghiệm của phương trình: $z^2 + z + 1 = 0$.
Rút gọn biểu thức $P = \left(z + \dfrac{1}{z}\right)^2 + \left(z^2 + \dfrac{1}{z^2}\right)^2 + \left(z^3 + \dfrac{1}{z^3}\right)^2 + \left(z^4 + \dfrac{1}{z^4}\right)^2$

Bài 5: Giải phương trình trên tập số phức: $x^2 - (5-i)x + 8 - i = 0$

Bài 6: Giải phương trình trên tập số phức: $z^2 + 2\overline{z} + 1 - 6i = 0$

Bài 7: (ĐH – A 2009) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

HD:

$\Delta = -36 = 36i^2 \Rightarrow z_{1,\,2} = -1 \pm 3i. |z_1| = \; |z_2| = \sqrt{10} \Rightarrow A = 20$

Đs: $A = 20$

Bài 8: Cho z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 4z + 11 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{(z_1 + z_2)^2}$.

HD:

Giải pt đã cho ta được các nghiệm: $z_1 = 1 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i, z_2 = 1 + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$

Suy ra $|z_1| = |z_2| = \sqrt{1^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{22}}{2};\; z_1 + z_2 = 2$

Do đó $\dfrac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{(z_1 + z_2)^2} = \ldots = \dfrac{11}{4}$

Bài 9: Giải phương trình:

a. $z^2 + |z| = 0$ b. $\left(z^2 + 3z + 6\right)^2 + 2z\left(z^2 + 3z + 6\right) - 3z^2 = 0$

Đs:

a. $z \in \{0; i; -i\}$ b. $z = -3 \pm \sqrt{3};\; z = -1 \pm \sqrt{5}i$

Bài 10: Giải phương trình: $z^2 + \bar{z} = 0$.

Đs: $z = 0, z = -1$, $z = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Bài 11: Tìm đa thức bậc hai hệ số thực nhận α làm nghiệm biết:

a. $\alpha = 2 - 5i$ b. $\alpha = -2 - i\sqrt{3}$ c. $\alpha = \sqrt{3} - i\sqrt{2}$

Bài 12: Giải phương trình $z^2 - \left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)z + i\sin\varphi.\cos\varphi = 0$, $\varphi \in R$ trên tập số phức

Đs: $z_1 = \cos\varphi;\; z_2 = i\sin\varphi$

Bài 13: Gọi z_1 và z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình: $z^2 + 2z + 4 = 0$. Tính giá trị của $A = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 3|z_1 + z_2|^3$

Bài 14: Chứng minh rằng nếu phương trình $az^2 + bz + c = 0$ (a, b, c $\in$ R) có nghiệm phức $\alpha \notin$ R thì $\overline{\alpha}$ cũng là nghiệm của phương trình đó.

Bài 15: Giải phương trình sau trên tập số phức:

a. $\left(z + 2i\right)^2 + 2\left(z + 2i\right) - 3 = 0$ b. $\left(\dfrac{4z + i}{z - i}\right)^2 - 5\dfrac{4z + i}{z - i} + 6 = 0$

Bài 16: Chứng minh rằng:

a. Nếu $x + iy$ là căn bậc hai của hai số phức $a + bi$ thì $x - yi$ là căn bậc hai của số phức $a - bi$

b. Nếu $x + iy$ là căn bậc hai của số phức $a + bi$ thì $\dfrac{x}{k} + \dfrac{y}{k}i$ là căn bậc hia của số phức $\dfrac{a}{k^2} + \dfrac{b}{k^2}i$ $(k \neq 0)$

Bài 17: Tìm tham số m để mỗi phương trình sau đây có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện đã chỉ ra:

a. $z^2 - mz + m + 1 = 0$ điều kiện: $z_1^2 + z_2^2 = z_1z_2 + 1$

b. $z^2 - 3mz + 5i = 0$ điều kiện: $z_1^3 + z_2^3 = 18$

Bài 18: Giải các phương trình sau trong C.

a. $x^2 - \sqrt{3}.x + 1 = 0$ b. $3\sqrt{2}.x^2 - 2\sqrt{3}.x + \sqrt{2} = 0$ c. $x^2 - (3 - i)x + 4 - 3i = 0$

d. $3x^2 - x + 2 = 0$ e. $3x^2\sqrt{2} - 2x\sqrt{3} + \sqrt{2} = 0$ f. $3i.x^2 - 2x - 4 + i = 0$

Đs:

a. $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \pm \dfrac{1}{2}i$ b. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}(1 \pm i)$ c. $2 + i\ ; 1 - 2i$

d. $\dfrac{1 \pm i\sqrt{23}}{6}$ e. $\dfrac{\sqrt{6}}{6} \pm \dfrac{\sqrt{6}}{6}i$ f. $-\dfrac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{10} - 2} + i.\dfrac{\sqrt{2\sqrt{10} + 2} - 1}{3}$

Bài 19: Cho phương trình $z^2 + (2 - i)z + 3 + 5i = 0$. Không giải phương trình hãy tính $z_1^2 + z_2^2.z_1^4 + z_2^4$

Bài 20: Giải phương trình: $z^2 - (\cos\varphi + i\sin\varphi)z + i\cos\varphi\sin\varphi = 0$

HD:

$\Delta = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 - 4i\cos\varphi\sin\varphi = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi - 2i\sin 2\varphi$

$= \cos 2\varphi - i\sin 2\varphi = \cos(-2\varphi) + i\sin(-2\varphi) = \left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right)^2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{1}{2}\left[(\cos\varphi + i\sin\varphi) - \left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right)\right] = i\sin\varphi \\ z = \dfrac{1}{2}\left[(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right)\right] = \cos\varphi \end{array}\right.$$

Bài 21: Giải các phương trình sau trên tập số phức

1. $z^3 = \overline{z}$ 2. $|z| + z = 3 + 4i$ 3. $(1 + i)z^2 + 2 + 11i = 0$

Phương trình bậc cao:

Bài 1: Tìm các số thực a, b, c để có $z^3 - 2(1+i)z^2 + 4(1+i)z - 8i = (z - ai)(z^2 + bz + c)$

Từ đó giải phương trình $z^3 - 2(1+i)z^2 + 4(1+i)z - 8i = 0$ trên tập số phức. Tìm modun của các nghiệm đó

Đáp số: $a = 2, b = -2, c = 4$ và $|z| = 2$

Bài 2: Cho phương trình: $(z + i)(z^2 - 2mz + m^2 - 2m) = 0$. Hãy xác định điều kiện của tham số m sao cho phương trình:

a. Chỉ có đúng 1 nghiệm phức.

b. Chỉ có đúng 1 nghiệm thực.

c. Có ba nghiệm phức.

Bài 3: Giải phương trình sau biết chúng có một nghiệm thuần ảo:

a. $z^3 - iz^2 - 2iz - 2 = 0$. b. $z^3 + (i - 3)z^2 + (4 - 4i)z - 7 + 4i = 0$.

Bài 4: Giải phương trình $z^3 - 2(1+i)z^2 + 4(1+i)z - 8i = 0$, biết rằng phương trình có một nghiệm thuần ảo

Đáp số: Phương trình có ba nghiệm là $z = 2i; z = 1 \pm i\sqrt{3}$

Bài 5: Tìm 3 số thực a, b, c thỏa mãn:

$z^3 - 2(1+i)z^2 + 4(1+i)z - 8i = (z - ai)(z^2 + bz + c)$

Từ đó giải phương trình: $z^3-2(1+i)z^2+4(1+i)z-8i=0$

Bài 6: Giải phương trình sau trong tập số phức: $z^4-z^3+6z^2-8z-16=0$

Đáp số: $\Leftrightarrow (z+1)(z-2)(z^2+8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1 \\ z=2 \\ z=2\sqrt{2}i \\ z=-2\sqrt{2}i \end{array}\right.$

Bài 7: Giải phương trình: $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0.$

HD: Đặt thừa số chung

Đáp số: $z=-1, z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i, z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Bài 8: Giải các phương trình sau trên C :

a. $z^4-z^3+\frac{z^2}{2}+z+1=0$ bằng cách đặt ẩn số phụ $w=z-\frac{1}{z}$;

b. $\left(z^2+3z+6\right)^2+2z\left(z^2+3z+6\right)-3z^2=0$

c. $\left(z^2+1\right)^2+\left(z+3\right)^2=0$

Bài 9: Giải các phương trình sau trên C :

a. $(z-i)\left(z^2+1\right)\left(z^3+i\right)=0$ b. $\left(z^2+z\right)^2+4\left(z^2+z\right)-12=0.$

Bài 10: Giải phương trình $z^3+(1+i)z^2+(3+i)z+3i=0$

Bài 11: Gọi $z_1;z_2;z_3;z_4$ là 4 nghiệm của phương trình $z^4-2z^3+6z^2-8z+8=0$ trên C

Tính tổng $S=\frac{1}{z_1^4}+\frac{1}{z_2^4}+\frac{1}{z_3^4}+\frac{1}{z_4^4}$

Bài 12: Cho đa thức $P(z)=z^3+(3-6i)z^2+(10-18i)z+30i$

a. Tính $P(-3i)$

b. Giải phương trình $P(z)=0$

Đs:

a. $P(-3i)=0$ b. $z=-3i,\ z=3\pm i$

Bài 13: Giải các phương trình

a. $z=\left(2-\frac{z+1}{z-7}\right)^2$ biết $z=3+4i$ là một nghiệm của phương trình

b. $z^6+z^5-13z^4-14z^3-13z^2+z+1=0$

c. $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)+1=0$

Đs:

a. $z=9;\ z=3\pm 4i$ b. $z=\frac{1-\pm\sqrt{3}i}{2};\ z=-2\pm\sqrt{3};\ z=2\pm\sqrt{3}$

c. $z=-1;0;1$

Hệ phương trình

Bài 1: Giải hệ phương trình hai ẩn phức z_1, z_2 sau :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 4 + i \\ z_1^2 + z_2^2 = 5 - 2i \end{cases}$$

Bài 2: Giải hệ phương trình hai ẩn phức z_1, z_2 sau :

$$\begin{cases} z_1 z_2 = -5 - 5i \\ z_1^2 + z_2^2 = -5 + 2i \end{cases}$$

Bài 3: Giải các hệ phương trình sau trên tập số phức:

a. $\begin{cases} x + 2y = 1 - 2i \\ x + y = 3 - i \end{cases}$ b. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i \\ x^2 + y^2 = 1 - 2i \end{cases}$ c. $\begin{cases} x + y = 5 - i \\ x^2 + y^2 = 8 - 8i \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 7 + 4i \end{cases}$ e. $\begin{cases} x + y = 5 - i \\ x^2 + y^2 = 1 + 2i \end{cases}$ f. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = -2 - 3i \end{cases}$

g. $\begin{cases} x^2 + y^2 = -6 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{5} \end{cases}$ h. $\begin{cases} x + y = 3 + 2i \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{17}{26} + \dfrac{1}{26}i \end{cases}$

Bài 4: Giải các hệ phương trình sau

a. $\begin{cases} \left|\dfrac{z - 12}{z - 8i}\right| = \dfrac{5}{3} \\ \left|\dfrac{z - 4}{z - 8}\right| = 1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} \left|\dfrac{z - 1}{z - i}\right| = 1 \\ \left|\dfrac{z - 3i}{z + i}\right| = 1 \end{cases}$ c. $\begin{cases} |z_1| + |z_2| + |z_3| = 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1.z_2.z_3 = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} z_1.z_2 = -5 - 5i \\ z_1^2 + z_2^2 = -5 + 2i \end{cases}$ e. $\begin{cases} z_1 + z_2 = 4 + i \\ z_1^2 + z_2^2 = 5 - 2i \end{cases}$ g. $\begin{cases} z_1^3 + z_2^5 = 0 \\ z_1^2.(\overline{z_2})^4 = 1 \end{cases}$

Bài 5: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} z_1 + z_2 = 4 + i \\ z_1^2 + z_2^2 = 5 - 2i \end{cases}$ b. $\begin{cases} z_1.z_2 = -5 - 5.i \\ z_1^2 + z_2^2 = -5 + 2.i \end{cases}$

c. $\begin{cases} u^2 + v^2 + 4uv = 0 \\ u + v = 2i \end{cases}$ d. $\begin{cases} |z - 2i| = |z| \\ |z - i| = |z - 1| \end{cases}$

Đs:

a. $(3 - i;\ 1 + 2.i)$ và $((1 + 2.i;\ 3 - i)$

b. $(2 - i; -1 - 3.i), (-1 - 3i; 2 - i), (-2 + i; 1 + 3i), (1 + 3i; -2 + i)$

Bài 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt{7y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2} \end{cases}$ $(x, y \in R)$.

Bài 7: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} z_1z_2=\dfrac{1}{2} \\ z_1+2z_2=\sqrt{3} \end{cases}$$

Đs: $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{4};\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{4};\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)$

Bài 8: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x+iy-2z=10 \\ x-y+2iz=20 \\ ix+3iy-(1+i)z=30 \end{cases}$

b. $\begin{cases} z^3+2z^2+2z+1=0 \\ z^{2010}+z^{2011}+1=0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2\left|z-i\right|=\left|z-\overline{z}+2i\right| \\ \left|z^2-\overline{z}^2\right|=4 \end{cases}$

d. $\begin{cases} z_1+z_2=3-i \\ \dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{3+i}{5} \end{cases}$

Căn bậc hai của số phức

Bài 1: Tìm căn bậc hai của số phức:

a. $z=17+20\sqrt{2}i.$ b. $\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ c. $-40+42i$ d. $11+4\sqrt{3}i$

Bài 2: Tìm căn bậc hai của mỗi số phức sau:

a. -1 + 4$\sqrt{3}.i$ b. 4 + 6$\sqrt{5}.i$ c. -1 - 2$\sqrt{6}.i$ d. -5 + 12.i

Đs:

a. $\pm(\sqrt{3}+2.i)$ b. $\pm(3+\sqrt{5}.i)$ c. $\pm(\sqrt{2}-\sqrt{3}.i)$ d. ± (2 + 3i)

Bài 3: Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức sau:

a. $-1+4\sqrt{3}i$ b. $4+6\sqrt{5}i$ c. $-1-2\sqrt{6}i$

C. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC

Dạng 1: Viết số phức dưới dạng lượng giác

Bài 1: Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác

a. $(1-i\sqrt{3})(1+i)$ b. $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

c. $z=\sin\varphi+i\cos\varphi$ d. $z=\tan\dfrac{5\pi}{8}+i$

Giải:

a. $1-i\sqrt{3}=2\left[\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})\right]; 1+i=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$.

Do đó $(1-i\sqrt{3})(1+i)=2\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{12})+i\sin(-\frac{\pi}{12})\right]$.

b. Từ phần trên ta có ngay kết quả

$$\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right].$$

c. Ta có $z=\sin\varphi+i\cos\varphi=\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)$.

d. $z=\tan\frac{5\pi}{8}+i=\frac{-1}{\cos\frac{5\pi}{8}}\left(-\sin\frac{5\pi}{8}-i\cos\frac{5\pi}{8}\right)=\frac{1}{\cos\frac{3\pi}{8}}\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$

Bài 2: Tuỳ theo góc φ, hãy viết số phức sau dưới dạng lượng giác $(1-\cos\varphi-i\sin\varphi)(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Giải:

Xét số phức $z=(1-\cos\varphi-i\sin\varphi)(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)$, ta có

$z=(2\sin^2\frac{\varphi}{2}-i.2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2})(2\cos^2\frac{\varphi}{2}+i.2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2})$

$=4\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}(\sin\frac{\varphi}{2}-i\cos\frac{\varphi}{2})(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2})$

$=2\sin\varphi(\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}-i(\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}))$

$=2\sin\varphi\left[\sin\varphi-i\cos\varphi\right]$ hay $z=2\sin\varphi(\sin\varphi-i\cos\varphi)$ (*)

- Nếu $\sin\varphi>0$, từ (*) có $z = 2\sin\varphi\left[\cos(\varphi-\frac{\pi}{2})+i.\sin(\varphi-\frac{\pi}{2})\right]$

- Nếu $\sin\varphi<0$, từ (*) ta có $z=-2\sin\varphi(-\sin\varphi+i\cos\varphi)$

$=-2\sin\varphi\left[\cos(\varphi+\frac{\pi}{2})+i.\sin(\varphi+\frac{\pi}{2})\right]$

- Nếu $\sin\varphi=0\Rightarrow z=0$, nên không có dạng lượng giác xác định.

Bài 3: Viết các số sau dưới dạng lượng giác:

1. cosa – isina, $a\in[0;2\pi)$.
2. sina + i(1 + cosa), $a\in[0;2\pi)$.
3. cosa + sina + i(sina – cosa), $a\in[0;2\pi)$

Giải:

Ta có:

1. $\cos a-i\sin a=\cos(2\pi-a)+i\sin(2\pi-a)$ khi $a\in[0;2\pi)$

2. $z_2=\sin a+i(1+\cos a)=2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}+2i\cos^2\frac{a}{2}=2\cos\frac{a}{2}(\sin\frac{a}{2}+i\cos\frac{a}{2})$

- Nếu $a\in[0;\pi)\Rightarrow\cos\frac{a}{2}>0\Rightarrow z_2=2\cos\frac{a}{2}(\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}))$

- Nếu a $\in (\pi; 2\pi) \Rightarrow \cos\frac{a}{2} < 0 \Rightarrow$ $z_2 = -2\cos\frac{a}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{a}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{a}{2}\right)\right)$

- Nếu a $\Rightarrow$ $z_2 = 0(\cos 0 + i\sin 0)$

3. $z_3 = \cos a + \sin a + i(\sin a - \cos a) = \sqrt{2}\left(\cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

Bài 4: : Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

a. $(1 - i\sqrt{3})(1 + i)$ b. $\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$ c. $\frac{1}{2 + 2i}$

Giải:

1. Ta có: $1 - i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$(1 + i) = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

Áp dụng công tthức nhân, chia số phức ta được:

$$(1 - i\sqrt{3})(1 + i) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

Tương tự

b. $\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i} = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$

c. $\frac{1}{2 + 2i} = \frac{1}{4}(1 - i) = \frac{1}{4}\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Bài 5: Viết số phức $z = \left(\sqrt{3} - i\right)^2$ dưới dạng lượng giác.

Giải:

Cách 1: ***Khai triển hằng đẳng thức rồi chuyển sang dạng lượng giác.***

$$z = \left(\sqrt{3} - i\right)^2 = 3 - 2\sqrt{3}i + i^2 = 2 - 2\sqrt{3}i = 4\left(\frac{2}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{4}i\right) = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= 4\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Cách 2: ***Viết dạng lượng giác trước rồi áp dụng công thức Moa – vrơ.***

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Suy ra: $\left(\sqrt{3} - i\right)^2 = \left[2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right]^2 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Dạng 2: Các bài tập tính toán tổng hợp về dạng lượng giác

Bài 1: Cho số phức z có modul bằng 1 và φ là 1 acgument của nó. Hãy tìm 1 acgument của các số phức sau:

a. $-\frac{1}{2\bar{z}}$	b. $z^2 - z \quad (\sin\frac{\varphi}{2} \neq 0)$	c. $z^2 + \bar{z} \quad (\cos\frac{3\varphi}{2} \neq 0)$

Giải:

Số phức z có thể viết dưới dạng: $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$

a. $-\frac{1}{2\bar{z}} = -\frac{1}{2(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = -\frac{1}{2}[\cos\varphi + i\sin\varphi] = \frac{1}{2}[-\cos(\varphi) - i\sin(\varphi)] =$

$\frac{1}{2}[\cos(\varphi+\pi) + i\sin(\varphi+\pi)] \Rightarrow acgument = \varphi + \pi$

b. $z^2 - z = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 - (\cos\varphi + i\sin\varphi) = -2\sin\frac{3\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} + 2\cos\frac{3\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}i$

- Nếu $\sin\frac{\varphi}{2} > 0 \Rightarrow z^2 - z = 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(-\sin\frac{3\varphi}{2} + i\cos\frac{3\varphi}{2}\right)$

$= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2}\right)\right) \Rightarrow Acgument = \frac{\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2}$

- Nếu $\sin\frac{\varphi}{2} < 0 \Rightarrow z^2 - z = -2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{3\varphi}{2} - i\cos\frac{3\varphi}{2}\right)$

$= -2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\left(\frac{3\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i\cos\left(\frac{3\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right) \Rightarrow Acgument = \frac{3\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}$

c. $z^2 + \bar{z} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi - i\sin\varphi) = 2\cos\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + 2\cos\frac{3\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}i$

- Nếu $\cos\frac{3\varphi}{2} > 0 \Rightarrow z^2 + \bar{z} = 2\cos\frac{3\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$

$\Rightarrow Acgument = \frac{\varphi}{2}$

- Nếu $\cos\frac{3\varphi}{2} < 0 \Rightarrow z^2 + \bar{z} = -2\cos\frac{3\varphi}{2}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right)$

$\Rightarrow Acgument = \frac{\varphi}{2} + \pi$

Bài 2: Tính: $z = \frac{(1-i)^{10}\left(\sqrt{3}+i\right)^5}{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{10}}$

Giải:

$$z = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)^{10}.2^5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^5}{2^{10}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{10}}$$

$$= \frac{2^{10}\left(\cos\frac{35\pi}{2} + i\sin\frac{35\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}{2^{10}\left(\cos\frac{40\pi}{3} + i\sin\frac{40\pi}{3}\right)} = \frac{\left(\cos\frac{55\pi}{3} + i\sin\frac{55\pi}{3}\right)}{\left(\cos\frac{40\pi}{3} + i\sin\frac{40\pi}{3}\right)} = \cos 5\pi + i\sin 5\pi = -1$$

Bài 3: Viết số phức z dưới dạng lượng giác biết rằng: $|z-1| = |z - i\sqrt{3}|$ và $i\bar{z}$ có một acgument là $\frac{\pi}{6}$.

Giải:

$$i\bar{z} = ri\cos\varphi + r\sin\varphi = r\left[\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)\right] \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$= r(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{r}{2} + i\frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |iz - 1| = \left(\frac{r}{2} - 1\right)^2 + \frac{3r^2}{4} = r^2 - r + 1$$

$$|z - i\sqrt{3}| = \frac{r^2}{4} + 3\left(\frac{r}{2} - 1\right)^2 = r^2 - 3r + 3 \Rightarrow |iz - 1| = |z - i\sqrt{3}| \Leftrightarrow r = 1 \Rightarrow z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

Bài 4: Viết dạng lượng giác của số phức z biết rằng $|z| = \sqrt{2}$ và một acgumen của $\frac{\bar{z}}{1+i}$ là $-\frac{3\pi}{4}$

Giải:

Gọi φ là một acgumen của z thì −φ là một acgumen của $\bar{z}$ mà $1+i$ có một acgumen là $\frac{\pi}{4}$ nên $\frac{\bar{z}}{1+i}$ có một acgumen là $-\varphi - \frac{\pi}{4}$.

Theo giả thiết ta có $-\varphi - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + l2\pi \ (l \in \mathbb{Z})$

Vậy dạng luợng giác của z là: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Dạng 2: Sử dụng công thức Moa-vrơ tính toán

Bài 1: Tính giá trị $A = \frac{(1-i)^{10}(\sqrt{3}+i)^5}{(-1-i\sqrt{3})^{10}}$

Giải:

Biểu diễn lượng giác cho các số phức:

$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; $\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ và $-1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

Sau đó áp dụng công thức Moavrơ biến đổi $A = cos5\pi + i\sin 5\pi = -1$.

Bài 2: Tìm phần thực và phần ảo của mỗi số phức sau

a. $A=\dfrac{(1+i)^{10}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^9}$ b. $B=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)i^5(1+\sqrt{3}i)^7$ c. $z^{2009}+\dfrac{1}{z^{2009}}$. Biết $z+\dfrac{1}{z}=1$.

Giải :

a. $A=\dfrac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^{10}}{\left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\right]^9}=\dfrac{2^5\left(\cos\dfrac{5\pi}{2}+i\sin\dfrac{5\pi}{2}\right)}{2^9\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)}=\dfrac{1}{2^4}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\dfrac{1}{16}$

Vậy phần thực $=-\dfrac{1}{16}$ và phần ảo = 0

b. $\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)i^5(1+\sqrt{3}i)^7=\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]i\left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right]^7$

$=2^7\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]\left(\cos\dfrac{7\pi}{3}+i\sin\dfrac{7\pi}{3}\right)i=2^7\left[\cos2\pi+i\sin2\pi\right]i=2^7i=128i$

Vậy phần thực bằng 0 và phần ảo bằng 128.

c. Từ $z+\dfrac{1}{z}=1\Rightarrow z^2-z+1=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\\ z=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\end{array}\right.$

Khi $z=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$.

Ta có

$z^{2009}+\dfrac{1}{z^{2009}}=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{2009}+\left(\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}}\right)^{2009}$

$=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{2009}+\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]^{2009}=\left(\cos\dfrac{2009\pi}{3}+i\sin\dfrac{2009\pi}{3}\right)$

$=\left(\cos\dfrac{2009\pi}{3}+i\sin\dfrac{-2009\pi}{3}\right)=2\cos\left(669\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right)=-2\cos\dfrac{2\pi}{3}=1.$

Tương tự : $z=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\Rightarrow z^{2009}+\dfrac{1}{z^{2009}}=1$

Bài 3: Tìm phần thực và phần ảo của số phức z, biết $z^2=-2+2\sqrt{3}i$.

Giải:

Ta chuyển $-2+2\sqrt{3}i$ sang dạng lượng giác rồi từ dạng lượng giác ta chuyển về dạng đại số.

$-2+2\sqrt{3}i=4\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

Suy ra:

$$z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow z^2 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \sqrt{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3.2} + i\sin\frac{2\pi}{3.2}\right) \\ z = -\sqrt{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3.2} + i\sin\frac{2\pi}{3.2}\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ z = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + i\sqrt{3} \\ z = -2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - i\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy: Phần thực và phần ảo của z là 1 và $\sqrt{3}$ hoặc -1 và $-\sqrt{3}$.

Ứng dụng của dạng lượng giác

Bài 1: Chứng minh rằng:

$$\sin 5t = 16\sin^5 t - 20\sin^3 t + 5\sin t$$
$$\cos 5t = 16\cos^5 t - 20\cos^3 t + 5\cos t$$

Giải:

Dùng công thức Moivre và công thức khai triển nhị thức $(\cos t + i\sin t)^5$

Ta được:

$$\cos 5t + i\sin 5t = \cos^5 t + 5i\cos^4 t\sin t + 10i^2\cos^3 t\sin^2 t + 10i^3\cos^2 t.\sin^3 t + 5i^4\cos t.\sin^4 t + i^5\sin^5 t$$

$$\Rightarrow \cos 5t + i\sin 5t = \cos^5 t - 10\cos^3 t\left(1-\cos^2 t\right) + 5\cos t\left(1-\sin^2 t\right)^2 + i\left[5\left(1-\sin^2 t\right)^2\sin t - 10\left(1-\sin^2 t\right)\sin^3 t + \sin^5 t\right]$$

Đồng nhất hai vế ta được điều phải chứng minh.

Bài 2: Giải phương trình: $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \quad (1)$

Giải:

Ta có: $(1) \Leftrightarrow z^4(z+1) + z^2(z+1) + (z+1) = 0$

$$\Leftrightarrow (z+1)\left(z^4 + z^2 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 \\ z^4 + z^2 + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Xét phương trình: $z^4 + z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \\ z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \end{array}\right.$

Từ $z^2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \\ z = -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$

Từ $z^2 = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ z = -\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{array}\right.$

Tóm lại phương trình đã cho có tất cả 5 nghiệm:

$z = -1$; z = $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Bài 3: Cho z_1 và z_2 là hai số phức xác định bởi $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ và $z_2 = 1 - i$

a. Xác định dạng đại số và dạng lượng giác của $\frac{z_1}{z_2}$

b. Từ đó suy ra giá trị chính xác của: $\cos\frac{7\pi}{12}$ và $\sin\frac{7\pi}{12}$

Giải:

Ta có $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)$

Ta có: $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$; $z_2 = \sqrt{2}(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right))$

$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})$

$\Rightarrow \cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ và $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

Bài 4: Cho số phức z_0 có môđun bằng 1 và argument bằng $\frac{2\pi}{5}$

A CMR z_0 là nghiệm của phương trình $z^5 - 1 = 0$

b. Rút gọn biểu thức $(z-1)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)$

c. Hãy suy ra rằng z_0 là nghiệm của phương trình: $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0$

d. Giải phương trình ở câu c.

e.Từ đó suy ra giá trị của z_0 và biểu thức giá trị của $\cos\frac{2\pi}{5}$ và $\sin\frac{2\pi}{5}$

Giải:

a. Ta có: $z_0 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$

Áp dụng công thức Moavrơ ta có: $z_0^5 = (\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5})^5 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 \Rightarrow z_0$ là nghiệm của phương trình $z^5 - 1 = 0$.

b. Khai triển đẳng thức này ta được $z^5 - 1 = 0$

c. $z^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4) = 0$

mà $z_0 \neq 0 \Rightarrow z_0$ là nghiệm của phương trình $1+z+z^2+z^3+z^4=0 \Leftrightarrow z^2\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2\right)$ (với $z \neq 0$)

$\Rightarrow z_0$ là nghiệm của phương trình $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2=0$ (*) $\Rightarrow$ đpcm.

d. Đặt $y = z+\frac{1}{z} \Rightarrow$ phương trình (*) có dạng: $y^2-y+1=0 \Leftrightarrow y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

e) Từ các câu trên ta có: z_0 là nghiệm của một trong hai phương trình sau: $z+\frac{1}{z}=y_1$ hoặc $z+\frac{1}{z}=y_2$

- Xét phương trình: $z+\frac{1}{z}=y_1 \Leftrightarrow z^2-y_1z+1=0 \Leftrightarrow z^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}z+1=0$

$$\Delta=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2-4=-\frac{5+\sqrt{5}}{2}=\left[i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right]^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+\frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \\ z_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \end{array}\right.$$

- Xét phương trình: $z+\frac{1}{z}=y_2 \Leftrightarrow z^2-y_2z+1=0 \Leftrightarrow z^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}z+1=0$

$$\Delta=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-4=-\frac{5-\sqrt{5}}{2}=\left[i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right]^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}+\frac{i}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \\ z_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \end{array}\right.$$

Vì $\cos\frac{2\pi}{5}$ và $\sin\frac{2\pi}{5}$ đều dương $\Rightarrow$ phần thực và phần ảo của z_0 đều dương

$$\Rightarrow z_0=z_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+\frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow \cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ và } \sin\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$

Bài 5: Tìm n là số nguyên dương và $n\in[1,10]$ sao cho số phức $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ là số thực

Giải:

Ta có: $1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow z=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

Để $z\in R \Rightarrow 2^n.\sin\frac{n\pi}{3}=0 \Rightarrow \sin\frac{n\pi}{3}=0 \Rightarrow$ n chia hết cho 3, mà n nguyên dương $\in[1;10] \Rightarrow n\in[3;6;9]$

Bài 6: Giải phương trình: $z^6=-64 \quad (1)$

Giải:

Giả sử $z=x+yi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

Ta có: $-64=64(\cos\pi+i\sin\pi)$

$Z^6=-64 \Rightarrow r^6(\cos6\varphi+i\sin6\varphi)=64(\cos\pi+i\sin\pi) \Rightarrow r^6=64 \Rightarrow r=2$

Và $\cos6\varphi + i\sin6\varphi = \cos\pi + i\sin\pi \Rightarrow 6\varphi = \pi + 2k\pi$ $(k\in Z) \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{6}+2k\frac{\pi}{6}$

Với k = 0 $\Rightarrow z_1 = 2\left(cos\dfrac{\pi}{6} + i sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$

Với k = -1 $\Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} - i$

Với k = 1 $\Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = 2i$

Với k = -2 $\Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = -2i$

Với k = -3 $\Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) = -\sqrt{3} - i$

Bài 7: Tìm số phức z thỏa mãn $|z| = 4$ và một acgumen của $\dfrac{\sqrt{3}+}{\bar{z}}$ bằng $-\dfrac{\pi}{6}$

Giải:

Ta có $|z| = 4 \Rightarrow z = 4(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow \bar{z} = 4(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$ và

$\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}+i}{\bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \varphi\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \varphi\right)\right)$

Theo giả thiết $\dfrac{\pi}{6} + \varphi = -\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \varphi = -\dfrac{\pi}{3}$

Vậy $z = 4\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = 2 - 2\sqrt{3}i$

Bài 8: Tính tổng sau: $S = (1+i)^{2008} + (1-i)^{2008}$

Giải:

$1 + i = \sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}) \Rightarrow (1+i)^{2008} = 2^{1004}(\cos 502\pi + i\sin 502\pi)$

$1 - i = \sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos(-\dfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{4}))$

$\Rightarrow (1-i)^{2008} = 2^{1004}(\cos(-502\pi) + i\sin(-502\pi)).$

Do đó $S = 2^{1005}\cos(502\pi) = 2^{1005}$.

Bài 9: Chứng minh rằng các điểm biểu diễn các căn bậc ba của 1 lập thành một tam giác đều.

Giải:

Xét phương trình $z^3 = 1$ trên $\mathbb{C}$, có nghiệm $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ Khi đó

$z^3 = 1 \Leftrightarrow r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ 3\varphi = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Do đó phương trình có đúng ba nghiệm ứng với ba giá trị của k là

- Với k = 0 ta có $z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$;

- Với k = 1 ta có $z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

- Với k = 2 ta có $z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Nên 1 có ba căn bậc ba đó là các số phức được xác định như trên. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_0, z_1, z_2. Khi đó $\left|\overline{OA}\right| = \left|\overline{OB}\right| = \left|\overline{OC}\right| = 1; \widehat{AOB} = \frac{2\pi}{3}; \widehat{BOC} = \frac{2\pi}{3}$

Từ đó suy ra tam giác ABC là tam giác đều.

Nếu kết hợp thêm khai triển nhị thức Newton ta được nhiều kết quả hay và bất ngờ về tổ hợp.

Một số ứng dụng khác

Bài 1: Tính giá trị của $S = C_{2009}^0 - C_{2009}^2 + C_{2009}^4 - ... - C_{2009}^{2006} + C_{2009}^{2008}$

Giải:

Xét khai triển:

$$(1+i)^{2009} = \sum_{k=0}^{2009} C_{2009}^k.i^k = \left(C_{2009}^0 - C_{2009}^2 + C_{2009}^4 - ... + C_{2009}^{2008}\right) + \left(C_{2009}^1 - C_{2009}^3 + C_{2009}^5 - ... + C_{2009}^{2009}\right)i$$

Mặt khác $(1+i)^{2009} = (\sqrt{2})^{2009}.\left(cos\frac{2009\pi}{4} + i\sin\frac{2009\pi}{4}\right) = 2^{1004} + 2^{1004}.i$

So sánh phần thực và phần ảo ta đọc $S = 2^{1004}$.

Nhận xét.

Bằng việc xét khai triển $(1+i)^n$ ta có kết quả tổng quát sau:

$$\begin{cases} C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - ... = (\sqrt{2})^n.cos\frac{n\pi}{4} \\ C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - ... = (\sqrt{2})^n.\sin\frac{n\pi}{4} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Bài 2: Tính tổng S = $C_{2010}^0 - C_{2010}^2 + C_{2010}^4 - ... - C_{2010}^{2010}$

Giải:

Ta có S = $C_{2010}^0 + i^2C_{2010}^2 + i^4C_{2010}^4 + ... + i^{2010}C_{2010}^{2010}$.

Do đó có thể giải như sau:

Cách 1: S = $\frac{(1+i)^{2010} + (1-i)^{2010}}{2}$

Cách 2: S là phần thực của số phức $(1+i)^{2010}$ (do $(1+i)^{2010}$ và $(1-i)^{2010}$ là hai số phức liên hợp)

Bài tập tự giải:

Viết dạng lượng giác của số phức

Bài 1:

a. Viết dạng lượng giác của số phức z^2, biết $z = 1 + i$.

b. Viết dưới dạng lượng giác của số phức $z = 2i(\sqrt{3} - i)$.

Bài 2: Viết số phức z dưới dạng đại số: $z = (\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}})^8$.

Bài 3: Viết dưới dạng lượng giác các số phức sau:

a. $1-i\sqrt{3}$ b. 1 + i c. $(1-i\sqrt{3})(1+i)$ d. $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

e. $2.i.(\sqrt{3}-i)$ f. $\dfrac{1}{2+2}$ g. $z = \sin\phi + i.\cos\phi$

Đs:

a. $2\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i.\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right]$ b. $\sqrt{2}.\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$ c. $2\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{12}) + i.\sin(-\frac{\pi}{12})\right]$

d. $\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{7\pi}{12}) + i.\sin(-\frac{7\pi}{12})\right]$ e. $4(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{}{3})$ f. $\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right]$

g. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$

Bài 4: Cho số phức $z = 1 + i\sqrt{3}$. Hãy viết dạng lượng giác của số phức z^5.

Bài 5: Viết dạng lượng giác số $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .Suy ra căn bậc hai số phức z

Bài 6: Viết các số sau dưới dạng lượng giác:

a. $z_1 = 6 + 6i\sqrt{3}$ b. $z_2 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$

c. $z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ d. $z_3 = 9 - 9i\sqrt{3}$ e. $z_5 = -4i$

Đs:

$z_1 = 12\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; $z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; $z_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$

$z_4 = 18\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$; $z_5 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$;

Bài 12: Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

a. $-2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ b. $\left(\cos\frac{\pi}{17} - i\sin\frac{\pi}{17}\right)$

c. $\left(\sin\frac{\pi}{17} - i\cos\frac{\pi}{17}\right)$ d. $1 - \cos a + i\sin a,\ a \in [0; 2\pi)$

Đs:

a. $2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ b. $\cos\left(-\frac{\pi}{17}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{17}\right)$

c. $\cos\frac{\pi}{34} + i\sin\frac{\pi}{34}$

d.

- Nếu a $\in (0;2\pi) \Rightarrow \sin\frac{a}{2} > 0 \Rightarrow$ $z_2 = 2\sin\frac{a}{2}(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}))$

- Nếu a = 0 $\Rightarrow$ không tồn tại số phức dưới dạng lượng giác.

Bài : Tìm một acgumen của các số phức sau:

a. $-2+2\sqrt{3}.i$ b. 4 4i c. $1 - \sqrt{3}.i$ d. $\cos\frac{\pi}{4} - i.\sin\frac{\pi}{4}$

e. $-\sin\frac{\pi}{8} - i.\cos\frac{\pi}{8}$ f. $(1-i.\sqrt{3})(1+i)$

Đs:

a. $\frac{2\pi}{3}$ b. $\frac{3\pi}{4}$ c. $-\frac{\pi}{3}$ d. $-\frac{\pi}{4}$ e. $-\frac{5\pi}{8}$ f. $-\frac{\pi}{12}$

Dạng toán về tính toán:

Bài 1: Tìm phần thực và phần ảo của mỗi số phức sau:

a. $\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)i^5\left(1+\sqrt{3}i\right)^7$; b. $\frac{(1+i)^{10}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^9}$; c. $z^{2000} + \frac{1}{z^{2000}}$ biết rằng $z + \frac{1}{z} = 1$.

Bài 2: Chứng minh rằng: $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{12}$ là số thực

Đs: Sử dụng công thức Moavrơ : $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{12} = -64$

Bài 3: Tìm phần thực, phần ảo của các số phức sau

a. $\frac{(1+i)^{10}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^9}$. b. $\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)i^5\left(1+i\sqrt{3}\right)^7$.

HD: Sử dụng công thức Moivre.

Đáp số: a. Phần thực $-\frac{1}{16}$, phần ảo bằng 0

b. Phần thực 0, phần ảo bằng 128

Bài 5: Áp dụng công thức Moivre để tính

a. $(\cos 15^o + i\sin 15^o)^5$ b. $\sqrt{2}\left(\cos 30^o + i\sin 30^o\right)^7$ c. $(1+i)^{16}$ d. $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$

Bài 6: Hãy tính tổng $S = 1 + z + z^2 + z^3 + ...z^{n-1}$ biết rằng $z = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

Bài 7: Thực hiện các phép tính

a. $3\left(\cos 120^o + i\sin 120^o\right)(\cos 45^o + i\sin 45^o)$ b. $\sqrt{2}\left(\cos 18^o + i\sin 18^o\right)(\cos 72^o + i\sin 72^o)$

c. $5(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ d. $\frac{\cos 85^\circ + i\sin 85^\circ}{\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ}$

e. $\dfrac{\sqrt{2}(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})}{2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})}$

f. $\dfrac{\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)}{\sqrt{3}(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)}$

g. $(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})i^5.(1+\sqrt{3}i)^7$

h. $z^{2008}+\dfrac{1}{z^{2008}}$ biết $z+\dfrac{1}{z}=1$

i. $(\cos\frac{\pi}{6}+i.\sin\frac{\pi}{6}).3(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})$

Đs:

a. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+i.\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ b. $3(\cos\frac{5\pi}{12}+i.\sin\frac{5\pi}{12})$ c.

d. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}+i.\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ e. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}+i.\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ f. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i.\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

Bài 8: Tìm môđun của z và argument:

a. $z=\dfrac{\left(2\sqrt{3}+2i\right)^8}{\left(1-i\right)6}+\dfrac{\left(1+i\right)^6}{\left(2\sqrt{3}-2i\right)^8}$

b. $z=\dfrac{\left(-1+i\right)^4}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{10}}+\dfrac{1}{\left(2\sqrt{3}+2i\right)^4}$

c. $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^n+\left(1-i\sqrt{3}\right)^n$

Đs:

a. |z| = $\left|z\right| = 2^{13}+\dfrac{1}{2^{13}}$; $\arg z=\dfrac{5\pi}{6}$

b. $\left|z\right|=\dfrac{1}{2^9}$; arg z = π

c. $\left|z\right|=2^{n+1}\left|\cos\dfrac{5n\pi}{3}\right|$; $\arg z=\varphi\in\{0;\pi\}$

Bài 9: Thực hiện phép tính:

a. $3\left(\cos 20^o + i\sin 20^o\right)\left(\cos 25^o + i\sin 25^o\right)$

b. $\dfrac{\sqrt{2}(\cos 45^0 + i.\sin 45^0)}{\sqrt{3}(\cos 15^0 + i.\sin 15^0)}$

c. $\dfrac{\sqrt{2}(\cos\frac{2\pi}{3}+i.\sin\frac{2\pi}{3})}{2(\cos\frac{\pi}{2}+i.\sin\frac{\pi}{2})}$

d. $5(\cos\frac{\pi}{6}+i.\sin\frac{\pi}{6}).3(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})$

Đs:

a. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+i.\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ b. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i.\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ c. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}+i.\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ d. $15(\cos\frac{5\pi}{12}+i.\sin\frac{5\pi}{12})$

Bài 10: Tính:

a. $(\cos 12^o + i\sin 12^o)^5$ b. $\left[\sqrt{2}(\cos 30^0 + i\sin 30^0)\right]^7$ c. $(\sqrt{3}-i)^6$

d. $(1+i)^{16}$ e. $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$ f. $\left(\frac{i+1}{i}\right)^{2008}$ g. $\left(\frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}\right)^{21}$

Đs

a. $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ b. $-4\sqrt{6}-i.4\sqrt{2}$ c. -2^6 d. 2^8 e. 1 f. $\frac{-1}{2^{1004}}$ h. 2^{21}

Bài 11: Tìm một acgumen của mỗi số phức sau:

a. $-2+2\sqrt{3}.i$ **ĐS:** $\frac{2\pi}{3}$ b. $4-4i$ **ĐS:** $\frac{3\pi}{4}$

c. $1 - \sqrt{3}.i$ **ĐS:** $-\frac{\pi}{3}$ d. $\cos\frac{\pi}{4}-i.\sin\frac{\pi}{4}$ **ĐS:** $-\frac{\pi}{4}$

e. $-\sin\frac{\pi}{8}-i.\cos\frac{\pi}{8}$ **ĐS:** $-\frac{5\pi}{8}$ f. $(1-i.\sqrt{3})(1+i)$ **ĐS:** $-\frac{\pi}{12}$

Bài 12: Cho hai số phức $z_1=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ và $z_2=1+\sqrt{3}i$

a. Tính môđun và argument của hai số phức nói trên.

b. Tính môđun và argument của z_1^3 và z_2^2 và $\frac{z_1^3}{z_2^2}$

c. Từ đó suy ra giá trị chính xác của $\cos\frac{\pi}{12}$ và $\sin\frac{\pi}{12}$

Đs:

a. Ta có $|z_1| = 2$; $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$; $|z_2| = 2$; $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$

b. $|z_1^3| = 8$; $\varphi_3 = \frac{3\pi}{4}$; $|z_2| = 4$; $\varphi_4 = \frac{2\pi}{3}$; $\left|\frac{z_1^3}{z_2^2}\right| = 2$; $\varphi_5 = \frac{\pi}{12}$

c. $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ và $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Bài 13: Tìm các căn bậc hai của số phức sau:

a. $z=1+i$ b. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}$ c. $-2\left(1+i\sqrt{3}\right)$ d. $7-24i$

Đs:

a. $z_k=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right)$, k ∈ {0;1}

b. $z_k=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}$, k ∈ {0;1}

c. $z_k=\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}$, k ∈ {0;1}

d. $z_k = 2\left(\cos\dfrac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2} + i\sin\dfrac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)$, k $\in \{0;1\}$

Bài 14: Sử dụng dạng lượng giác để tính số phức sau:

a. $\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(-3+3i)\left(2\sqrt{3}+2i\right)$ b. $(1+i)(-2-2i)i$

c. $-2i(-4+4\sqrt{3}i)(3+3i)$ d. $3(1-i)(-5+5i)$

Đs:

a. $12\sqrt{2}$ (cos$\dfrac{7\pi}{4}$ + isin$\dfrac{7\pi}{4}$) b. 4(cos0 + isin0)

c. $48\sqrt{2}$ (cos$\dfrac{5\pi}{12}$ + isin$\dfrac{5\pi}{12}$) d. 30(cos$\dfrac{\pi}{2}$ + isin$\dfrac{\pi}{2}$)

Bài 15: Tìm số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z+3i}{z+i}\right| = 1$ và $z+1$ có một acgumen là $-\dfrac{\pi}{6}$

Đs: $z = 2\sqrt{3}-1-2i$

Bài 16: Viết dưới dạng lượng giác của một số phức z sao cho $|z| = \dfrac{1}{3}$ và một acgumen của $\dfrac{z}{1+i}$ là $-\dfrac{3\pi}{4}$

Đs: $z = \dfrac{1}{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

Bài tập tự giải phần ứng dụng:

Bài 1: Cho n nguyên dương.

a. Chứng minh rằng: $C_{2n}^0 - 3C_{2n}^2 + 9C_{2n}^4 - 27C_{2n}^6 + ... + (-3)^n C_{2n}^{2n} = 2^{2n}.cos\dfrac{2n\pi}{3}$

b. Tính S = $C_{20}^0 - 3C_{20}^2 + 3^2C_{20}^4 - ... + 3^{10}C_{20}^{20}$

Bài 2: Cho số nguyên dương n.

a. Biểu diễn số phức sau theo dạng đại số: $(1 + i)^{4n}$

b. Chứng minh rằng

$$\left(1-C_{4n}^2+C_{4n}^4-C_{4n}^6+...+C_{4n}^{4n}\right)^2+\left(C_{4n}^1-C_{4n}^3+C_{4n}^5-C_{4n}^7+...-C_{4n}^{4n-1}\right)^2=16^n$$

Bài 3:

a. Cho $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ $(\varphi \in R)$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, ta có

$z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\varphi$; $z^n - \dfrac{1}{z^n} = 2i\sin n\varphi$.

b. Từ câu a. chứng minh rằng

$\cos^4\varphi = \dfrac{1}{8}(\cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 3)$,

$\sin^5\varphi = \dfrac{1}{16}(\sin 5\varphi - 5\sin 3\varphi + 10\sin\varphi)$.

Bài 4: Cho các số thực a,b, c và số phức $z = -\dfrac{1}{2} + i.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Chứng minh rằng: $\left(a+bz+cz^2\right)\left(a+bz^2+cz\right) \geq 0$ .Dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi nào?