# Phần 1: Các công thức tính đạo hàm

## I. Kiến thức cơ bản.

### 1. Bảng đạo hàm các hàm số cơ bản.

| Hàm số (y = f(x)) | Đạo hàm (y' = f'(x)) | Hàm số | Đạo hàm |
|---|---|---|---|
| y = c | 0 | y = tanx | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| y = x | 1 | y = cotx | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| $y = x^n$ | $nx^{n-1}$ | $y = e^x$ | $e^x$ |
| y = 1/x | $-\frac{1}{x^2}$ | $y = a^x$ | $a^x.\ln a$ |
| $y=\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | y = lnx | 1/x |
| y = sinx | cosx | $y = \log_a x$ | $\frac{\ln a}{x}$ |
| y = cosx | -sinx | | |

### 2. Đạo hàm của hàm hợp.

Ta xét hàm số y = f(u(x)). Ta tính đạo hàm của hàm số đã cho theo x nh- sau

$$y'_x = f'_x = f'_u.u'_x$$

Bảng đạo hàm của hàm số hợp

| Hàm số | Đạo hàm | Hàm số | Đạo hàm |
|---|---|---|---|
| $y = u^n$ | $n.u^{n-1}.u'$ | y = tanu | $\frac{1}{\cos^2 u}.u'$ |
| y = 1/u | $-\frac{1}{u^2}.u'$ | y = cotu | $-\frac{1}{\sin^2 u}.u'$ |
| $y=\sqrt{u}$ | $\frac{1}{2\sqrt{u}}.u'$ | $y = e^u$ | $u'.e^u$ |
| y = sinu | u'.cosu | $y = a^u$ | $u'.a^u.\ln a$ |
| y = cosu | - u'.sinu | y = lnu | $\frac{1}{u}.u'$ |
| $y = \log_a u$ | $\frac{\ln a}{u}.u'$ | | |

***<u>Chú ý:</u>*** Khi áp dụng tính đạo hàm của hàm hợp ta chú ý ban đầu tính đạo hàm của hàm số theo biến u rồi nhân với đạo hàm của hàm số u theo biến x.

### 3. Các phép toán đạo hàm.

Cho hai hàm số y = u(x), y = v(x). Khi đó

*) (u + v)' = u' + v'

*) (u - v)' = u' – v'

*) (uv)' = u'v + v'u

*) (ku)’ = k.u’ ( k là hằng số)

*) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

**4. Đạo hàm bậc cao của hàm số.**

Đạo hàm bậc n của hàm số y = f(x) là đạo hàm bậc 1 của đạo hàm bậc n – 1 của hàm số y = f(x) ( n > 1).

**II. Các dạng toán cơ bản.**

**1. Dạng 1.** Tính đạo hàm của hàm số.

**Ph□ơng pháp.** Ta vận dụng các quy tắc và phép tính đạo hàm, đặc biệt là đạo hàm của hàm hợp. Nếu yêu cầu tính đạo hàm tại một điểm ta cần tính đạo hàm rồi thay vào đe đ- ợc kết quả.

***Ví dụ 1.*** Tính đạo hàm các hàm số sau

a) $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ b) $y = \sin x - \cos x + \tan x$

c) $y = x^4 + 2\sqrt{x}$ d) $y = \cot x - 3x + 2$

**<u>Giải</u>**

a) Ta có

$$y' = \left(x^3 - 2x^2 + 3x + 4\right)' = 3x^2 - 4x + 3$$

b) Ta có

$$y' = \left(\sin x - \cos x + \tan x\right)' = \cos x + \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$$

c) Ta có

$$y' = \left(x^4 + 2\sqrt{x}\right)' = 4x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

d) Ta có

$$y' = \left(\cot x - 3x + 2\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x} - 3$$

***Ví dụ 2.*** Tính đạo hàm các hàm số sau tại các điểm t- ơng ứng.

a) $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ tại $x_0 = -1$.

b) $y = \sin 2x + \cos x$ tại $x_0 = -\frac{\pi}{4}$.

c) $y = \sqrt{x} - 2x$ tại $x_0 = 2$ .

**<u>Giải</u>**

a) Ta có

$$y' = \left(-x^3 + 3x^2 - 4x + 1\right)' = -3x^2 + 6x - 4 \text{ suy ra } y'(-1) = -3 - 6 - 4 = -13$$

b) Ta có

$$y' = \left(\sin 2x + \cos x\right)' = 2\cos 2x - \sin x$$

suy ra $y'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Ta có

$$y' = \left(\sqrt{x} - 2x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2 \text{ suy ra } y'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} - 2 = \frac{1-4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

***Ví dụ 3.*** Tính đạo hàm các hàm số sau

a) $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$ b) $y = \dfrac{x^2+3x-1}{x+1}$ c) $y = x^4 + 3x^2 + 2$

d) $y = \sin(2x+1) + \cos(1-x)$ e) $y = \sqrt{3x+2}$

f) $y = \sqrt{x^2+4x+1}$ g) $y = \tan(x^2 + 2\sqrt{x} + 1)$

**<u>Giải</u>**

a) Ta có

$$y' = \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)' = \frac{(2x-1)'(x+2)-(2x-1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

b) Ta có

$$y' = \left(\frac{x^2+3x-1}{x+1}\right)' = \frac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^2}$$

c) Ta có

$$y' = \left(x^4+3x^2+2\right)' = 4x^3+6x$$

d) Ta có

$$y' = \left(\sin(2x+1)+\cos(1-x)\right)' = 2\cos(2x+1)+\sin(1-x)$$

e) Ta có

$$y' = \left(\sqrt{3x+2}\right)' = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$$

f) Ta có

$$y' = \left(\sqrt{x^2+4x+1}\right)' = \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+1}} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}$$

g) Ta có

$$y' = \left(\tan(x^2+2\sqrt{x}+1)\right)' = \frac{\left(x^2+2\sqrt{x}+1\right)'}{\cos^2(x^2+2\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\cos^2(x^2+2\sqrt{x}+1)} = \frac{2x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\cos^2(x^2+2\sqrt{x}+1)}$$

**2. Dạng 2.** Giải phương trình y’ = 0.

**Phương pháp.** Ta tính y’ sau đó giải phương trình y’ = 0.

***Ví dụ 1.*** Giải phương trình y’ = 0 biết.

a) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ b) $y = x^3 - 3x^2$ c) $y = 4x^3 - 12x^2 + 9x - 1$

d) $y = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ e) $y = \dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$ f) $y = \dfrac{x^4}{2} - 3x^2 + \dfrac{5}{2}$

g) $y=-x^4-2x^2+3$ h) $y=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$ i) $y=\dfrac{2x^2+x}{x+1}$

**Giải**

a) Ta có

$y'=\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ suy ra $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Vây phương trình y' = 0 có hai nghiệm phân biệt x = 0 và x = 2.

b) Ta có

$y'=\left(x^3-3x^2\right)'=3x^2-6x$ suy ra $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Vây phương trình y' = 0 có hai nghiệm phân biệt x = 0 và x = 2.

c) Ta có

$y'=\left(4x^3-12x^2+9x-1\right)'=12x^2-24x+9$

Suy ra $y'=0\Leftrightarrow 12x^2-24x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Vây phương trình y' = 0 có hai nghiệm phân biệt $x=\dfrac{3}{2},x=\dfrac{1}{2}$

d) Ta có

$y'=\left(\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}\right)'=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

suy ra $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=0\Rightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$

Vậy phương trình y' = 0 có hai nghiệm phân biệt x = 0 và x = -2.

e) Ta có

$y'=\left(\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}\right)'=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

suy ra $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=0\Rightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$

Vậy phương trình y' = 0 có hai nghiệm phân biệt x = 0 và x = -2.

f) Ta có

$y'=\left(\dfrac{x^4}{2}-3x^2+\dfrac{5}{2}\right)'=2x^3-6x$

Suy ra $y'=0\Leftrightarrow 2x^3-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$

Vậy phương trình y' = 0 có ba nghiệm phân biệt $x = 0, x = \pm\sqrt{3}$.

g) Ta có

$$y' = \left(-x^4 - 2x^2 + 3\right)' = -4x^3 - 4x$$

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy ph- ơng trình y' = 0 có nghiệm duy nhất x = 0.

h) Ta có

$$y' = \left(\frac{x^2 + x + 2}{x - 1}\right)' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

Suy ra $y' = 0' \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình y' = 0 có hai nghiệm phân biệt x = -1 và x = 3.

i) Ta có

$$y' = \left(\frac{2x^2 + x}{x + 1}\right)' = \frac{2x^2 + 4x + 1}{(x+1)^2}$$

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 4x + 1}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-2 - \sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{-2 + \sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

Vậy ph- ơng trình y' = 0 có hai nghiệm phân biệt $x = \frac{-2 - \sqrt{2}}{2}, x = \frac{-2 + \sqrt{2}}{2}$

**3. Dạng 3: Chứng minh đẳng thức về đạo hàm.**

**Ph□ơng pháp:** Tính đạo hàm và sử dụng các phép biến đổi đặc biệt là về hàm l- ợng giác.

***Ví dụ 1.*** Chứng minh rằng

a) y' – $y^2$ -1 = 0 với y = tanx.

b) y' + $2y^2$ + 2 = 0 với y = cot2x.

c) $y'^2 + 4y^2 = 4$ với y = sin2x.

**<u>Giải</u>**

a) Ta có $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Khi đó

$$y' - y^2 - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1 - \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}{\cos^2 x} = \frac{1 - 1}{\cos^2 x} = 0$$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

b) Ta có $y' = -\frac{2}{\sin^2 2x}$

Khi đó

$$y' + 2y^2 + 2 = -\frac{2}{\sin^2 2x} + \frac{2\cos^2 2x}{\sin^2 2x} + 2 = \frac{-2 + 2\left(\sin^2 2x + \cos^2 2x\right)}{\sin^2 2x} = 0$$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

c) Ta có

y' = 2cos2x

Khi đó $\left(y'\right)^2 + 4y^2 = 4\cos^2 2x + 4\sin^2 2x = 4$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

**III. Bài tập tự luyện.**

***Bài 1.*** Tính đạo hàm các hàm số sau

a) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ b) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ c) $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 1}$

d) $y = x^4 - x^2 + 1$ e) $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ f) $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$

***Bài 2.*** Tính đạo hàm các hàm số sau

a) $y = \dfrac{x - 2}{x - 1}$ b) $y = x^3 - 3x^2 + 2$ c) $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$

d) $y = \dfrac{-3x + 1}{x + 2}$ e) $y = \dfrac{-3x^2 - x + 1}{2x - 1}$ f) $y = -2x^4 + 3x^2 - 4$

***Bài 3.*** Tính đạo hàm các hàm số sau tại các điểm t- ơng ứng

a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ tại điểm $x_0 = -1$

b) $y = x^4 - 5x^2 + 4$ tại điểm $x_0 = 2$

c) $y = \dfrac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 2x + 4$ tại điểm $x_0 = \sqrt{3}$.

***Bài 4.*** Giải phương trình y' = 0 trong các trường hợp sau

a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ b) $y = \dfrac{2x^2 + 2}{-x + 1}$ c) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

d) $y = x^4 - 5x^2 + 4$ e) $y = -2x^4 - x^2 + 4$ f) $y = -x^3 - 3x + 2$

# Phần 2: Tiếp tuyến của đồ thi hàm số

**I. Kiến thức cơ bản.**

**1. Tiếp tuyến tại một điểm:** Cho hàm số y= f(x) (C), $x_0$ là một điểm thuộc vào TXĐ của hàm số trên và tồn tại đạo hàm tại đó. Khi đó ta có tiếp tuyến với (C) tại điểm

($x_0$; f($x_0$)) có ph- ơng trình là $y = y'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

**Nhận xét:** ***ở trên ta có $y'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến. Ta cần tìm đ- ợc hệ số góc và tiếp điểm trong tr- ờng hợp này nếu muốn viết ph- ơng trình tiếp tuyến với đ- ờng cong nào đó. Các bài tập hay gặp trong phần này: Cho hoành độ tiếp điểm; tung độ tiếp điểm; hay tại giao điểm của đồ thị hàm số với đ- ờng thẳng nào đó.***

**2. Điều kiện tiếp xúc của hai đồ thị.**

Cho hai hàm số y = f(x) ($C_1$), y = g(x) ($C_2$).

Khi đó ($C_1$) tiếp xúc với ($C_2$) khi và chỉ khi hệ ph- ơng trình $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f^{'}(x) = g^{'}(x) \end{cases}$ có nghiệm.

***Chú ý:***

+ Nếu hai đồ thị ($C_1$) và ($C_2$) là hai đ- ờng cong thì chúng tiếp xúc với nhau tại hai điểm khi hệ trên có hai nghiệm phân biệt.

+ Nếu một trong hai đ- ờng là đ- ờng thẳng thì để có hai tiếp tuyến ta cần hệ trên có hai nghiệm phân biệt.

**II. Dạng toán cơ bản.**

**1. Dạng 1. Viết ph□ơng trình tiếp tuyến tại một điểm.**

**Ph□ơng pháp:** Ta cần tìm đ- ợc toạ độ tiếp điểm dựa vào các dữ kiện bài toán đã cho.

**Nhận xét:** Trong dạng này ta th- ờng gặp các tr- ờng hợp sau

+ Cho biết tọa độ của tiếp điểm.

+ Cho biết hoành độ của tiếp điểm hoặc điều kiện nào đó để tìm đ- ợc hoành độ tiếp điểm.

+ Biết tung độ tiếp điểm hoặc điều kiện nào đó để tìm đ- ợc tung độ tiếp điểm.

+ Tiếp điểm là giao điểm của đồ thị với một đồ thị khác. Khi đó ta cần giải hệ ph- ơng trình để tìm toạ độ của tiếp điểm.

**2. Dạng 2. Tiếp tuyến đi qua một điểm:** Cho hàm số y= f(x) (C) viết ph- ơng trình tiếp tuyến với (C) đi qua điểm $M(x_M; y_M)$

**Ph□ơng pháp:**

**Cách 1:** Tìm tiếp điểm

Giả sử tiếp tuyến với (C) cần tìm có tiếp điểm là $M_0(x_0; y_0)$. Khi đó tiếp tuyến cần tìm có ph- ơng trình $y = f^{/}(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

Mà tiếp tuyến đi qua điểm $M(x_M; y_M)$ suy ra $y_M = f^{/}(x_0)(x_M-x_0) + f(x_0)$ giải ph- ơng trình này ta tìm đ- ợc hoành độ tiếp điểm sau đó tìm $y_0 = f(x_0)$ rồi viết ph- ơng trình tiếp tuyến cần tìm theo dạng 1.

**Cách 2:** Sử dụng điều kiện tiếp xúc

Giả sử đ- ờng thẳng qua $M(x_M; y_M)$ có hệ số góc k khi đó nó có ph- ơng trình $y = k(x-x_M) + y_M$

Ta có đ- ờng thẳng $y = k(x-x_M) + y_M$ là tiếp tuyến của đ- ờng cong (C)

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M \\ f^{/}(x) = k \end{cases}$ giải hệ này ta tìm đ- ợc hoành độ của tiếp điểm sau đó viết ph- ơng trình tiếp tuyến t- ơng ứng.

**Nhận xét:** ở trên có bao nhiêu nghiệm x ta có bấy nhiêu tiếp tuyến đi qua điểm M.

**3. Dạng 3. Tiếp tuyến cho tr□ớc hệ số góc:**

**Ph□ơng pháp.**

**Cách 1.** Tìm tiếp điểm

Giả sử tiếp tuyến cần tìm có tiếp điểm là $M_0(x_0; y_0)$. Khi đó tiếp tuyến cần tìm có ph- ơng trình $y = f^{/}(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

Khi đó theo giải thiết ta có $f'(x_0) = k$. Giải ph- ơng trình này ta tìm đ- ợc hoành độ tiếp điểm sau đó tìm $y_0 = f(x_0)$ rồi viết ph- ơng trình tiếp tuyến cần tìm theo dạng 1.

**Nhận xét:** Trong dạng này ta có thể gặp các bài tập nh- sau:

*) Tiếp tuyến có hệ số góc k khi đó ta tìm tiếp điểm $M_0(x_0; y_0)$ bằng cách giải ph- ơng trình $f'(x_0) = k$ sau đó viết ph- ơng trình tiếp tuyến t- ơng ứng.

*) Tiếp tuyến vuông góc với đ- ờng thẳng y = ax + b khi đó tiếp tuyến có hệ số góc là $k = -\frac{1}{a}$ sau tìm tiếp điểm $M_0(x_0; y_0)$ bằng cách giải ph- ơng trình $f'(x_0) = k$ và viết ph- ơng trình tiếp tuyến t- ơng ứng.

*) Tiếp tuyến song song với đ- ờng thẳng y = ax+ b khi đó tiếp tuyến có hệ số góc là k= a sau đó tìm tiếp điểm $M_0(x_0; y_0)$ bằng cách giải ph- ơng trình $f'(x_0) = k$ và viết ph- ơng trình tiếp tuyến t- ơng ứng.

*) Tiếp tuyến tạo với chiều d- ơng trục hoành góc $\alpha$ khi đó hệ số góc của tiếp tuyến là $k = \tan\alpha$ sau đó tìm tiếp điểm $M_0(x_0; y_0)$ bằng cách giải ph- ơng trình $f'(x_0) = k$ và viết ph- ơng trình tiếp tuyến t- ơng ứng.

*) Tiếp tuyến tạo với đ- ờng thẳng y = ax +b một góc $\alpha$ khi đó hệ số hóc của tiếp tuyến là k thoả mãn $\left|\frac{k-a}{1+ka}\right| = \tan\alpha$ hoặc chúng ta dùng tích vô h- ớng của hai véctơ pháp tuyến để tìm hệ số góc k sau đó tìm tiếp điểm $M_0(x_0; y_0)$ bằng cách giải ph- ơng trình $f'(x_0) = k$ và viết ph- ơng trình tiếp tuyến t- ơng ứng.

## III. Ví du.

***Ví dụ 1:*** Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4\,(C)$. Viết ph- ơng trình tiếp tuyến với (C) biết

a) Hoành độ tiếp điểm lần l- ợt là -1; 3; $\sqrt{2}$
b) Tung độ tiếp điểm lần l- ợt là -4.
c) Tiếp điểm là giao của (C) với trục hoành.

**Giải**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$

a) Với hoành độ tiếp điểm $x_0 = -1$ ta có $y_0 = f(x_0) = f(-1) = -4$; $f'(x_0) = f'(-1) = 0$ suy ra tiếp tuyến với (C) khi đó có ph- ơng trình $y = f'(-1)(x+1) - 4$ hay $y = -4$

Với hoành độ tiếp điểm $x_0 = 3$ ta có $y_0 = f(x_0) = f(3) = 44$; $f'(x_0) = f'(3) = 40$ suy ra tiếp tuyến với (C) khi đó có ph- ơng trình $y = f'(3)(x-3) + 44$ hay $y = 40x - 76$

b) Với tung độ tiếp điểm $y_0 = -4$ ta có $x_0 = -1$ hoặc $x_0 = 0$

Với hoành độ tiếp điểm $x_0 = -1$ ta có $f'(x_0) = f'(-1) = 0$ suy ra tiếp tuyến với (C) khi đó có ph- ơng trình $y = f'(-1)(x+1) - 4$ hay $y = -4$

Với $x_0 = 0$ ta có $f'(x_0) = f'(0) = 1$ suy ra tiếp tuyến với (C) khi đó có ph- ơng trình $y = f'(0)(x+1) - 4$ hay $y = x - 3$.

c) Giao điểm của (C) với trục hoành có hoành độ là nghiệm của ph- ơng trình

$$y = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 3x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Khi đó $f'(1) = 8$ suy ra tiếp tuyến với (C) khi đó có ph- ơng trình $y = f'(1)(x-1)$ hay $y = 8x - 8$.

***Ví dụ 2:*** Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - m(x+1) + 1$ ($C_m$). Viết ph- ơng trình tiếp tuyến của ($C_m$) tại giao điểm của nó với Oy, tìm m để tiếp tuyến trên chắn trên hai trục tạo ra một tam giác có diện tích bằng 8.

**<u>Giải</u>**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có ($C_m$) giao với Oy tại điểm A(0; 1 -m)

$y' = f'(x) = 3x^2 - m$. Khi đó tiếp tuyến cần tìm là y = y'(0)x +1 – m hay y =-mx +1-m

Tiếp tuyến trên cắt trục hoành tại điểm $B(\frac{1-m}{m}; 0)$ $(m \neq 0)$ suy ra

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}|y_A|.|x_B| = \frac{1}{2}|1-m|.|\frac{1-m}{m}| = 8 \Leftrightarrow 16|m| = m^2 - 2m + 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -16m = m^2 - 2m + 1 \\ 16m = m^2 - 2m + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 + 14m + 1 = 0 \\ m^2 - 18m + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 9 \pm 4\sqrt{5} \\ m = 7 \pm 4\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Với m = 0 thì đồ thị hàm số đã cho không cắt trục hoành suy ra không tồn tại tam giác OAB. Vậy với $\left[\begin{array}{l} m = 9 \pm 4\sqrt{5} \\ m = 7 \pm 4\sqrt{3} \end{array}\right.$ thì tiếp tuyến cần tìm cắt hai trục tọa độ tạo ra tam giác có diện tích bằng 8.

***Ví dụ 3:*** Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2$ $(C)$ viết ph- ơng trình tiếp tuyến với (C) biết

a) Tiếp tuyến đó có hệ số góc k = 9

b) Tiếp tuyến vuông góc với đ- ờng thẳng $y = \frac{1}{3}x$

**<u>Giải</u>**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = f'(x) = 3x^3 - 6x$

a) Gọi A($x_A$; $y_A$) là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm khi đó ta có

$$f'(x_A) = 3x_A^2 - 6x_A = 9 \Leftrightarrow 3x_A^2 - 6x_A - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = -1 \\ x_A = 3 \end{array}\right.$$

Với $x_A = -1$ ta có $y_A = -4$ khi đó tiếp tuyến với (C) cần tìm là y = 9(x+1) – 4 hay y=9x+5.

Với $x_A$ = 3 ta có $y_A$ = 0 khi đó tiếp tuyến với (C ) cần tìm là y =9(x-3) hay y= 9x – 27

Vậy có hai tiếp tuyến với (C) có hệ số góc là k = 9 là y=9x+5 và y= 9x – 27.

b) Gọi M($x_M$ ;$y_M$) là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm.

Tiếp tuyến cần tìm vuông góc với đ- ờng thẳng $y = \frac{1}{3}x$ suy ra hệ số góc của nó là k = -3 (***Làm t- ơng tự nh- phần a***)

***Ví dụ 4:*** Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 5$ (C). Viết ph- ơng trình tiếp tuyến với (C) trong các tr- ờng hợp sau

a) Tiếp tuyến song song với đ- ờng thẳng y = 6x – 4.

b) Tiếp tuyến tạo với đ- ờng thẳng $y=-\frac{1}{2}x+5$ một góc $45^0$.

**Giải**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=6x^2-6x-12$

a) Vì tiếp tuyến song song với đ- ờng thẳng y = 6x – 4 suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là k = 6.

Gọi $M_0(x_0;\ y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm. Khi đó ta có

$$y'(x_0)=6\Leftrightarrow 6x_0^2-6x_0-12=6\Leftrightarrow x_0^2-x_0-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\\ x_0=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$$

Với $x_0=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ ta có $y_0=\frac{20\sqrt{13}-23}{2}$ khi đó tiếp tuyến cần tìm là

$$y=6\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)+\frac{20\sqrt{13}-23}{2}\Leftrightarrow y=6x+\frac{26\sqrt{13}-29}{2}$$

Với $x_0=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ ta có $y_0=-\frac{7\sqrt{13}+23}{2}$ khi đó tiếp tuyến cần tìm là

$$y=6\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)-\frac{7\sqrt{13}+23}{2}\Leftrightarrow y=6x-\frac{13\sqrt{13}+29}{2}$$

b) Vì tiếp tuyến cần tìm tạo với đ- ờng thẳng $y=-\frac{1}{2}x+5$ một góc $45^0$ suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là k thoả mãn

$$\left|\frac{k+\frac{1}{2}}{1-\frac{k}{2}}\right|=\tan 45^0\Leftrightarrow\left|\frac{2k+1}{2-k}\right|=1\Leftrightarrow|2k+1|=|2-k|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2k+1=2-k\\2k+1=k-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=\dfrac{1}{3}\\k=-3\end{array}\right.$$

sau đó làm t- ơng tự nh- phần a (Tìm tiếp điểm).

***Ví dụ 5:*** Viết ph- ơng trình tiếp tuyến với (C) : $y=2x^3-3x^2+5$ đi qua điểm $A\left(\frac{19}{12};4\right)$.

**Giải**

Giả sử đ- ờng thẳng đi qua $A\left(\frac{19}{12};4\right)$ có hệ số góc k, khi đó nó có dạng

$y=kx+4-\frac{19}{12}k$ (d)

Ta có (d) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ ph- ơng trình sau có nghiệm

$$\begin{cases}2x^3-3x^2+5=kx+4-\dfrac{19}{12}k\ (1)\\ 6x^2-6x=k\ \ (2)\end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta có

$$2x^3-3x^2+5=(6x^2-6x)x+4-\frac{19}{12}(6x^2-6x)\Leftrightarrow 8x^3-25x^2+19x-2=0$$

$$(x-1)(8x^2-17x+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\\x=\frac{1}{8}\end{array}\right.$$

Vậy có ba tiếp tuyến với (C) đi qua điểm $A\left(\frac{19}{12};4\right)$ ( Tự viết ph- ơng trình tiếp tuyến).

***Ví dụ 6.*** Cho hàm số $y=x^3+3x^2+3x+5\,(C)$

a) CMR: Không tồn tại hai điểm nào trên (C ) sao cho tiếp tuyến tại hai điểm đó vuông góc với nhau.

b) Tìm k sao cho trên (C) có ít nhất một điểm sao cho tiếp tuyến tại đó vuông góc với đ- ờng thẳng y = kx + m.

**<u>Giải</u>**

a) Giả sử trên (C) có hai điểm $M_1(x_1;\ y_1)$ và $M_2(x_2;\ y_2)$ mà tiếp tuyến với (C) tại đó vuông góc với nhau.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2$.

Khi đó ta có

$-1 = y'(x_1).y'(x_1) = 9.(x_1+1)^2.(x_2+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1\geq 0$ vô lý

Suy ra giả sử là sai hay ta có điều cần chứng minh.

b)

***Ví dụ 7.*** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ có đồ thị (C)

Viết ph- ơng trình tiếp tuyến với đồ thị (C) đi qua điểm A(3; 0).

**<u>Giải</u>**

Đ- ờng thẳng (Δ) đi qua A(3; 0) và có hệ số góc k có dạng: y = k(x - 3)

+) (Δ) là tếp tuyến với (C)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}k=x^2-2x & (1)\\ \frac{1}{3}x^3-x^2=k(x-3) & (2)\end{cases}\quad \text{Hệ có nghiệm.}$$

Thế (1) vào (2): $\frac{1}{2}x^3-x^2=(x^2-2x)(x-3)$

$$\Leftrightarrow 2x^3-12x^2+18x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$$

+) Với $x_1 = 0 \Rightarrow k_1 = 0 \Rightarrow$ PTT$^2$: y = 0

+) Với $x_2 = 3 \Rightarrow k_2 = 3 \Rightarrow$ PTT$^2$: y = 3x - 9.

Vậy có hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số đã cho thoả mãn yêu cầu bài toán y = 0 và y = 3x – 9.

***Ví dụ 8.*** Tìm a để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ (C) tiếp xúc với (P) : y = $x^2$ + a.

**Giải**

Điều kiện tiếp xúc của đồ thị (C) với (P) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} & (1) \\ \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x^2 + a & (2) \end{cases}$

Hệ có nghiệm

Giải (1) $\Rightarrow$ x = 0 Thế vào (2) $\Rightarrow$ a = - 1

*Vậy* với a = -1 đồ thị (1) tiếp xúc với (P).

***Ví dụ 9.*** Cho đ- ờng cong $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ (C)

Tìm các điểm trên Ox từ đó kẻ đ- ợc hai tiếp tuyến với (C) mà hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau.

**Giải:**

Gọi M(a; 0) $\in$ Ox; $\Delta$ là đ- ờng thẳng qua M có hệ số góc k: y = k(x - a)

($\Delta$) là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} & (1) \\ k(x - a) = x - 1 + \dfrac{1}{x - 1} & (2) \end{cases}$ (I) Hệ có nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k(x-1) = x - 1 - \dfrac{1}{x-1} & (1) \\ k(x-a) = x - 1 + \dfrac{1}{x-1} & (2) \end{cases}$$

(2) - (1) $\Rightarrow \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{k(1-a)}{2}$ (3)

Kết hợp (3) và (1) ta có: $\begin{cases} k \neq 1 \\ k = 1 - \dfrac{k^2(1-a)^2}{4} \quad (4) \end{cases}$

(4) $\Leftrightarrow$ $k^2(1 - a)^2 + 4k - 4 = 0$

Từ M kẻ đ- ợc hai tiếp tuyến vuông góc với nhau tới (C) $\Leftrightarrow$ Hệ trên có hai nghiệm phân biệt $k_1$, $k_2$ và $k_1.k_2 = -1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ \dfrac{-4}{(1-a)^2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a = -1, a = 3 \end{cases}$$

Vậy các điểm cần tìm là (-1; 0); (3; 0)

***Nhân xét:*** Từ hệ (I) ta phải biến đổi thành hệ t- ơng đ- ơng mà chỉ có a và k. Nhận thấy nếu tính đ- ợc $\dfrac{1}{x-1}$ theo a và k thay vào ph- ơng trình (1) thì đ- ợc một hệ mới t- ơng đ- ơng trong đó có một ph- ơng trình chỉ chứa a và k từ đó ta có phép biến đổi nh- trên và cách giải này là ngắn gọn.

***Ví dụ 10.*** Cho đ- ờng cong $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$ (C)

Tìm các điểm trên mặt phẳng toạ độ mà từ đó kẻ đ- ợc hai tiếp tuyến góc với (C), hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau.

**Giải**:

(Δ) là đ- ờng thẳng đi qua M(a; b) và có hệ số góc k nên PT (Δ): y = k(x - a) + b.

(Δ) là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} & (1) \\ k(x-a) + b = x - 1 + \dfrac{1}{x-1} & (2) \end{cases}$ Hệ có nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k(x-1) = x - 1 - \dfrac{1}{x-1} & (3) \\ k(x-a) + b = x - 1 + \dfrac{1}{x-1} & (4) \end{cases}$$

Lấy (4) - (3) $\Rightarrow \dfrac{2}{x-1} = k(1-a) + b \Rightarrow \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{k(1-a)+b}{2}$ (5)

Kết hợp (5) và (1) ta có hệ $\begin{cases} k \neq 1 \\ k = 1 - \left(\dfrac{k(1-a)+b}{2}\right)^2 \end{cases}$ (6)

( k $\neq$ 1 vì từ (1) nếu k = 1 thì $\overline{\exists}$ x, hệ vô nghiệm.)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ k^2(1-a)^2 + 2((1-a)b+2)k + b^2 - 4 = 0 \quad (7) \end{cases}$$

Vì từ M kẻ đ- ợc hai tiếp tuyến vuông góc với nhau tới (C) $\Leftrightarrow$ hệ trên có hai nghiệm phân biệt $k_1$, $k_2$ và $k_1.k_2 = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ \dfrac{b^2-4}{(1-a)^2} = -1 \quad (8) \\ (1-a)^2 + 2((1-a)b+2) + b^2 - 4 \neq 0 \quad (9) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ (1-a)^2 + b^2 = 4 \quad (10) \\ 1 - a + b \neq 0 \quad (11) \end{cases} \quad (I)$$

Thế (10) vào (9): $2[(1 - a)b + 2] \neq 0 \Leftrightarrow (1 - a)b + 2 \neq 0$

Từ (10) $\Leftrightarrow (1 - a)^2 + b^2 + 2(1 - a)b = 4 + 2(1 - a)b$

$\Leftrightarrow (1 - a + b)^2 = 2(2 + (1 - a)b)$

Vì $2 + (1 - a)b \neq 0 \Rightarrow 1 - a + b \neq 0$.

Vậy ta có tập hợp các điểm M cần tìm là đ- ờng tròn tâm I(1; 0) bán kính R = 2, bỏ đi 4 điểm là giao các đ- ờng thẳng x = 1 và - x + y + 1 = 0 với đ- ờng tròn đó là các điểm $(1; \pm 2)$; $(1+\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(1-\sqrt{2};-\sqrt{2})$.

***Ví dụ 11.*** Cho đ- ờng cong: $y = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$ (C)

Tìm tất cả các điểm trên đ- ờng thẳng y = 7 mà từ đó kẻ đ- ợc hai tiếp tuyến với đ- ờng cong (C) mà hai tiếp tuyến đó hợp với nhau góc $\varphi = 45^0$.

**Giải:**

Gọi M $\in$ đt: y = 7 $\Rightarrow$ M(a; 7).

Ph- ơng trình đ- ờng thẳng ($\Delta$) qua M có hệ số góc k: y = k(x - a) + 7.

(Δ) là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 - \dfrac{2}{(x-1)^2} & (1) \\ k(x-a)+7 = 2x+1+\dfrac{2}{x-1} & (2) \end{cases}$ Hệ có nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k(x-1) = 2(x-1) - \dfrac{2}{x-1} & (3) \\ k(x-a)+7 = 2x+1+\dfrac{2}{x-1} & (4) \end{cases}$$

Lấy (4) - (3): $3 + \dfrac{4}{x-1} = k(1-a)+7 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{k(1-a)+4}{4}$ (5)

Kết hợp (5) và (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 2 \\ k = 2 - 2\left(\dfrac{k(1-a)+4}{4}\right)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 2 \\ k^2(1-a)^2 + 8k(2-a) = 0 \quad (6) \end{cases}$$

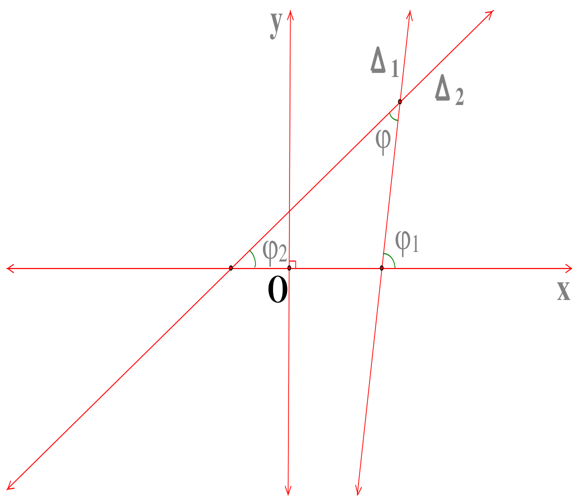
Từ M kẻ hai tiếp tuyến hợp với nhau góc $\varphi = 45^0$.

Không mất tính chất tổng quát

Ta giả sử: $\varphi_1 = 45^0 + \varphi_2$

$\Rightarrow \tan\varphi_1 = \dfrac{1+\tan\varphi_2}{1-\tan\varphi_2} \Leftrightarrow k_1 = \dfrac{1+k_2}{1-k_2}$

$\Leftrightarrow k_1 - k_1.k_2 = 1 + k_2$ (7)




Vì (6) phải có hai nghiệm phân biệt mà $\dfrac{c}{a} = 0 \Rightarrow$ có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm khác 0.

Vậy từ (6) $\Rightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ k_1 = 0 \\ k_2 \neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \neq 1 \\ k_1 \neq 0 \\ k_2 = 0 \end{cases}$ (8)

Kết hợp (8) và (7) ta có: $\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 0 \end{cases}$

Nếu $k_1$ = 1, từ (6) : $\begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 3 \\ (1-a)^2 + 8(2-a) = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ a = $5 \pm 2\sqrt{2}$.

Nếu $k_2$ = -1 , từ (8) : $\begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 3 \\ (1-a)^2 - 8(2-a) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ a = - 3$\pm$ $2\sqrt{6}$

Vậy các điểm tìm đ- ợc là : $M_{1;2}$ $(5 \pm 2\sqrt{2}$ ; 7); $M_{3;4}$$(-3 \pm 2\sqrt{6}$; 7)

***Ví dụ 12.*** Viết ph- ơng trình tiếp tuyến chung của hai (P) sau :

y = $x^2$ - 3x + 2 (1) và y = - $x^2$ + 7x - 11 (2)

**Giải:**

Gọi tiếp tuyến chung là : y = ax + b. Gọi $M_0(x_0; y_0)$ và $M'_0(x'_0;y'_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với Parabol (1) và (2)

Theo điều kiện tiếp xúc của hai đ- ờng ta có hệ sau :

$$\begin{cases} a = 2x_0 - 3 & (1) \\ a = -2x'_0 + 7 & (2) \\ x_0^2 - 3x_0 + 2 = ax_0 + b & (3) \\ -x'^2_0 - 7x'_0 - 11 = ax'_0 + b & (4) \end{cases}$$ Hệ có nghiệm.

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x_0 = 5 - x'_0$ (5)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow -(5 - x'_0)^2 + 2 = x'^2_0 - 11$

Giải ra tìm đ- ợc $x'_{0(1)} = 2 \Rightarrow a_1 = 3; b_1 = -7$

$x'_{0(2)} = 3 \Rightarrow a_2 = 1; b_2 = -2$

*Kết luận*: Tiếp tuyến chung là: y = 3x - 7 và y = x – 2.

***Ví dụ 13.*** Tìm tiếp tuyến cố định của họ đ- ờng cong có ph- ơng trình:

$$y = \frac{(m-1)x + m}{x - m} \quad (m \neq 0)$$

**Giải:**

Gọi đ- ờng thẳng: y = ax + b là tiếp tuyến cố định của họ đ- ờng cong

$\Leftrightarrow$ Hệ ph- ơng trình sau có nghiệm $\forall$m ≠ 0

$$\begin{cases} m-1+\dfrac{m^2}{x-m}=ax+b & (1) \\ -\dfrac{m^2}{(x-m)^2}=a & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1+\dfrac{m^2}{x-m}=ax+b & (3) \\ -\dfrac{m^2}{x-m}=a(x-m) & (4) \end{cases}$$

Lấy (3) - (4): $\dfrac{1}{x-m}=\dfrac{m(a-1)+b+1}{2m^2}$ (5)

Kết hợp (2) và (5) ta đ- ợc: $a=-\dfrac{1}{4m^2}(m(a-1)+b+1)^2$

$\Leftrightarrow (a+1)^2m^2+2(a-1)(b+1)m+(b+1)^2=0$

Ph- ơng trình này thỏa mãn $\forall m \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} (a+1)^2=0 \\ 2(a-1)(b+1)=0 \\ (b+1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$

*Kết luận*: Vậy họ đ- ờng cong có một tiếp tuyến cố định là: y = - x - 1

**IV. Bài tập tư luyện.**

***Bài 1.*** Cho $(C_m): y=x^3+mx^2+1$. Tìm m để $(C_m)$ cắt đ- ờng thẳng y = -x + 1 tại ba điểm A(0; 1), B, C sao cho tiếp tuyến với $(C_m)$ tại B và C vuông góc với nhau.

***Bài 2.*** Tìm các điểm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-x+\dfrac{2}{3}$ mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đ- ờng thẳng $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$.

***Bài 3.*** Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1\,(C)$. CMR: Trên (C) có vô số cặp điểm mà tiếp tuyến tại từng cặp điểm đó song song với nhau đồng thời các đ- ờng thẳng nối các cặp điểm này đồng quy tại một điểm cố định.

***Bài 4.*** Cho $y=x^3+3x^2-9x+5\,(C)$. Tìm tiếp tuyến với (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

***Bài 5.*** Cho $\begin{cases} y=x^3-4x^2+7x-4\,(C_1) \\ y=2x^3-5x^2+6x-8\,(C_2) \end{cases}$ Viết ph- ơng trình tiếp tuyến với hai đồ thị trên tại giao điểm của chúng.

***Bài 6.*** Viết ph- ơng trình tiếp tuyến với $(C)y=x^3+1-k(x+1)$ tại giao điểm của nó với trục Oy. Tìm k để tiếp tuyến đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8.

***Bài 7.*** Cho hàm số $(C): y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+x-4$. Viết ph- ơng trình tiếp tuyến với (C) trong các tr- ờng hợp sau

a) Có hệ số góc k = - 2.
b) Tiếp tuyến tạo với chiều d- ơng trục hoành góc $60^0$.
c) Tiếp tuyến tạo với chiều d- ơng trục hoành góc $15^0$.
d) Tiếp tuyến tạo với chiều d- ơng trục hoành góc $75^0$.

e) Tiếp tuyến tạo song song với đ- ờng thẳng y = - x + 2.
f) Tiếp tuyến vuông góc với đ- ờng thẳng y = 2x – 3.
g) Tiếp tuyến tạo với đ- ờng thẳng y= 3x + 7 góc $45^0$.

***Bài 8.*** Cho hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$

a) Viết ph- ơng trình tiếp tuyến với (C) đi qua điểm $A(\frac{23}{9}; -2)$.
b) Tìm trên đ- ờng thẳng y = - 2 những điểm kẻ đ- ợc hai tiếp tuyến tới (C) vuông góc với nhau.

***Bài 9.*** Cho hàm số $(C): y = -x^3 + 3x + 2$. Tìm trên trục hoành những điểm kẻ đ- ợc ba tiếp tuyến với (C). ***(ĐH SPHN2- KB-1999)***

***Bài 10.*** Cho hàm số $(C): y = x^3 - x - 6$. Viết ph- ơng trình tiếp tuyến với (C) đi qua điểm A(2; 0). ***(ĐH THHN- 1994).***

***Bài 11.*** Cho hàm số $(C): y = \frac{3x-2}{x-1}$. Viết ph- ơng trình tiếp tuyến với (C) tạo với trục hoành góc $45^0$.

***Bài 12.*** Cho hàm số $(C): y = \frac{4x-3}{x-1}$. Viết ph- ơng trình tiếp tuyến với (C) tạo với đ- ờng thẳng y = 3x góc $45^0$.

***Bài 13.*** Tìm trên Oy những điểm kẻ đ- ợc đúng một tiếp tuyến với $(C): y = \frac{x+1}{x-1}$.

***Bài 14.*** Cho hàm số $(C): y = \frac{x^2+x+1}{x-1}$. Tìm M trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M cắt hai trục Ox, Oy tại A, B tạo ra tam giác OAB vuông cân.
***(HVBCVTHN - 1997).***

***Bài 15.*** Cho hàm số $(C): y = \frac{2x^2+5x}{x+2}$. CMR: Tiếp tuyến với (C) tại mọi điểm M tùy ý luôn tạo với hai tiệm cận một tam giác có diện tích không đổi.

***Bài 16***. Tìm các điểm trên đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đ- ờng thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. ***(ĐH NGOẠI NGỮ HÀ NỘI 2001)***

***Bài 17.*** Tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất với đồ thị $(C): y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$.
***(ĐH NGOẠI TH□ƠNG TPHCM 1998).***

***Bài 18.*** Tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất với đồ thị

$$(C): y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m - 1$$

***( HỌC VIỆN QUAN HỆ QUỐC TẾ 2001).***

***Bài 19.*** Tìm điểm M trên đồ thị $(C): y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ sao cho tiếp tuyến với (C) tai M đi qua gốc tọa độ. ***( ĐH CÔNG ĐOÀN 2001).***

***Bài 20.*** Viết ph- ơng trình tiếp tuyến tại các điểm cố định mà đồ thị $(C_m): y = x^3 + mx^2 - m - 1$. Tìm quỹ tích giao điểm của các tiếp tuyến đó.

***( ĐH AN NINH 2000_ K A).***

***Bài 21.*** Cho đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$

a) Viết ph- ơng trình tiếp tuyến với (C) đi qua điểm $A\left(\frac{23}{9}; -2\right)$.

b) Tìm trên đ- ờng thẳng y = -2 điểm mà từ đó kẻ đ- ợc hai tiếp tuyến với (C) và chúng vuông góc với nhau.

***Bài 22.*** Cho hàm số $y = x^3 - 3x\,(C)$. Tìm các điểm trên đ- ờng thẳng x = 2 kẻ đ- ợc đúng ba tiếp tuyến với (C). ***( ĐH CẦN THƠ 2000_ K A).***

***Bài 23.*** Cho hàm số $y = \frac{-2x+1}{x+1}$ $(C)$. Viết ph- ơng trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến song song với đ- ờng thẳng y = -x. ***( ĐH ĐÀ LẠT 2000_ K A).***

***Bài 24.*** Cho hàm số $y = 3x - 4x^3\,(C)$. Viết ph- ơng trình tiếp tuyến với đồ thị (C) đi qua điểm A(1; 3) ***( ĐH TÂY NGUYÊN 2000_ K A).***

***Bài 25.*** Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 1\,(C)$. Đ- ờng thẳng y = 5 tiếp xúc với (C) tại A và cắt (C ) tại điểm B, tìm tọa độ điểm B. ***( ĐH TÂY NGUYÊN 2000_ K D).***

***Bài 26.*** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2\,(C)$. Viết ph- ơng trình tiếp tuyến với (C ) đi qua điểm A(1; 0). ***( ĐH AN NINH NHÂN DÂN 2000_ K D).***

***Bài 27.*** Tìm các điểm trên trục hoành kẻ đ- ợc đúng một tiếp tuyến với đồ thị

$$(C): y = \frac{x^2 + x - 3}{x + 2}$$

***Bài 28.*** Cho đồ thị $(C): y = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$. CMR trên đ- ờng thẳng y = 7 có bốn điểm sao cho từ mỗi điểm kẻ đ- ợc hai tiếp tuyến tới (C) và tạo với nhau một góc $45^0$.

***Bài 29.*** Cho đồ thị $(C): y = x + \frac{1}{x}$. Tìm tậ hợp các điểm trên mặt phẳng toạ độ Oxy thoả mãn

a) Từ đó không kẻ đ- ợc tiếp tuyến nào với đồ thị (C).

b) Từ đó kẻ đ- ợc ít nhất một tiếp tuyến với đồ thị (C).

c) Từ đó kẻ đ- ợc đúng một tiếp tuyến với đồ thị (C).

d) Từ đó kẻ đ- ợc đúng hai tiếp tuyến với đồ thị (C).

e) Từ đó kẻ đ- ợc đúng hai tiếp tuyến với đồ thị (C) và hai tiếp tuyến đo vuông góc với nhau.

***Bài 30.*** Viết ph- ơng trình tiếp tuyến đi qua điểm A(1; 0) tới đồ thị

$(C): y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$. ***( ĐH D□ỢC 1999).***

***Bài 31.*** Viết ph- ơng trình tiếp tuyến đi qua điểm A(-1; 0 ) tới đồ thị

$(C): y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$. ***( ĐH XÂY DỰNG 1995).***

***Bài 32.*** Viết ph- ơng trình tiếp tuyến đi qua điểm A(0; 5/4 ) tới đồ thị

$(C): y = \dfrac{-x^2 + x + 1}{x+1}$. ***( ĐHSP VINH 1998).***

***Bài 33.*** Viết ph- ơng trình tiếp tuyến đi qua điểm A(1; 1 ) tới đồ thị

$(C): y = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x-2}$. ***( ĐH ĐÀ LẠT 1999).***

# Phần 3: Đạo hàm và các bài toán tính tổng

**I. Kiến thức cơ bản.**

**1. Khai triển nhị thức Newtơn.**

Ta có $\left(a+b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k . b^{n-k} = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}.b + ... + C_n^{n-1} a.b^{n-1} + C_n^n .b \ (1)$

Trong đó:

+ a, b là hai số thực.

+ n là số nguyên d- ơng.

***<u>Nhân xét:</u>***

+ Trong khai triển trên số mũ của a giảm dần từ trái sang phải, ng- ợc lại số mũ của b tăng dần từ trái sang phải. Số mũ của a và b trong mỗi số hạng cộng lại đều bằng n.

+ Trong khai triển trên có n + 1 số hạng.

+ Số hạng tổng quát trong khai triển (1) là $T = C_n^k a^k . b^{n-k} \ \ (0 \le k \le n)$.

+ Số hạng thức k trong khai triển (1) là $C_n^{k-1} a^{k-1} . b^{n-k+1} \ \ (1 \le k \le n+1)$.

**2. Một vài khai triển th□ờng dùng.**

Ta có

$\left(x+1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n \ \ (2)$

Thay x = 1 vào hai vế của (2) ta có đẳng thức sau

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n$$

Thay x = - 1 vào hai vế của (2) ta có đẳng thức sau

$$0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + ... + C_n^{n-1}(-1)^{n-1} + C_n^n (-1)^n$$

**3. Mối liên hệ của hai hàm số bằng nhau.**

Ta có hai hàm số y = f(x) và y = g(x).

Nếu f(x) = g(x) thì f'(x) = g'(x)

**II. Dạng toán tính tổng của tổ hợp liên quan tới đạo hàm.**

**Ta có một vài chú ý khi gặp tính tổng của tổ hợp**

+ Nếu trong vế tính tổng không có $C_n^0$ thì ta cần dùng khai triển rồi đạo hàm hai vế theo x cả hai vế sau đó thay x bằng một giá trị thích hợp.

+ Nếu trong một vế tính tổng không có $C_n^0$ và $C_n^1$ thì ta dùng khai triển rồi đạo hàm hai vế theo x hai lần sau đó thãy bằng một giá trị thích hợp.

**III. Ví dụ.**

***Ví dụ 1.*** Chứng minh rằng

a) $2009.2^{2008} = C_{2009}^{1} + 2C_{2009}^{2} + ... + 2008C_{1009}^{2008} + 2009C_{2009}^{2009}$

b) $2009.2008.2^{2007} = 2C_{2009}^{2} + 3.2C_{2009}^{3} + ... + 2008.2007C_{1009}^{2008} + 2009.2008C_{2009}^{2009}$

**<u>Giải</u>**

$$\left(x+1\right)^{2009} = C_{2009}^{0} + C_{2009}^{1}x + C_{2009}^{2}x^{2} + C_{2009}^{3}x^{3} + ... + C_{2009}^{2008}x^{2008} + C_{2009}^{2009}x^{2009} \quad (*)$$

a) Ta có

Đạo hàm hai vế của (*) theo x ta có

$$2009\left(x+1\right)^{2008} = C_{2009}^{1} + C_{2009}^{2}x + ... + 2008C_{2009}^{2008}x^{2007} + 2009C_{2009}^{2009}x^{2008} \quad (a)$$

Thay x = 1 vào đẳng thức (a) ta có

$$2009.2^{2008} = C_{2009}^{1} + 2C_{2009}^{2} + ... + 2008C_{1009}^{2008} + 2009C_{2009}^{2009}$$

Vậy ta có đẳng thức cần chứng minh.

b)

Đạo hàm hai vế của (*) hai lần theo x ta có

$$2009.2008.\left(x+1\right)^{2007}$$

$$= 2C_{2009}^{2} + 3.2C_{2009}^{3}x + ... + 2008.2007C_{2009}^{2008}x^{2006} + 2009.2008C_{2009}^{2009}x^{2007}$$

Thay x = 1 vào đẳng thức trên ta có

$$2009.2008.2^{2007} = 2C_{2009}^{2} + 3.2C_{2009}^{3} + ... + 2008.2007C_{1009}^{2008} + 2009.2008C_{2009}^{2009}$$

Vậy ta có điều cần chứng minh.