

ÔN TẬP KỲ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN CỤM NAM TỪ LIÊM

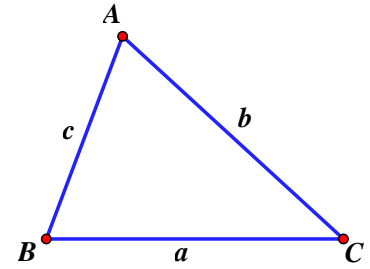
Trường THPT Trung Văn – Hà Nội

Chủ đề: Hệ thức lượng tam giác

Các công thức cần chú ý:

Cho tam giác ABC có:

- Các cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$.
- Các trung tuyến: m_a, m_b, m_c . Các đường cao: h_a, h_b, h_c .
- Các đường phân giác trong: l_a, l_b, l_c . Nửa chu vi: p , diện tích: S .
- Bán kính đường tròn ngoại tiếp: R , đường tròn nội tiếp: r .



Khi đó ta có các công thức sau:

- Định lý hàm số sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, cos: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.
- Các công thức diện tích: $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
- Công thức đường trung tuyến: $m_a = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}$.

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho ΔABC có $a = 12, b = 15, c = 13$.

- Tính số đo góc $\angle BAC$?
- Tính độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh C của tam giác?
- Tính diện tích tam giác, bán kính đường tròn nội tiếp.

Bài 2: Cho ΔABC có $AB = 6, AC = 8, \angle BAC = 120^\circ$. Tính cạnh BC và bán kính đường tròn ngoại tiếp?

Bài 3: Cho ΔABC có $\angle A = 60^\circ, \angle B = 45^\circ, b = 2$ tính độ dài cạnh a, c , bán kính đường tròn ngoại tiếp.

Bài 4: Cho ΔABC có $m_b = 4, m_c = 2$ và $a = 3$ tính độ dài cạnh AB, AC .

Bài 5: Tính $\angle A$ của ΔABC có các cạnh a, b, c thỏa hệ thức $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$?

Bài 6: Cho ΔABC , chứng minh rằng: $4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

Bài 7: Cho ΔABC , chứng minh rằng: $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}$

Bài 8: Cho ΔABC , chứng minh rằng: $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$

Bài 9: Cho ΔABC , chứng minh rằng: $c^2 = (a-b)^2 + 4S \left(\frac{1 - \cos C}{\sin C} \right)$

Bài 10: Cho ΔABC , chứng minh rằng: $a = b \cos C + c \cos B$

Bài 11: Cho ΔABC có $b + c = 2a$, chứng minh rằng: $\sin B + \sin C = 2 \sin A$ và $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

Bài 12: Để lắp đường dây cao thế từ vị trí A đến vị trí B phải tránh 1 ngọn núi, do đó người ta phải nối thẳng đường dây từ vị trí A đến vị trí C dài $10km$, rồi nối từ vị trí C đến vị trí B dài $8km$. Biết góc tạo bởi 2 đoạn dây AC và CB là 75° . Hỏi so với việc nối thẳng từ A đến B phải tốn thêm bao nhiêu m dây?

Bài 13: Cho tam giác ABC có $BC = a, \angle BAC = \alpha$ và hai đường trung tuyến BM, CN vuông góc với nhau. Tính diện tích của tam giác đã cho.

Bài 14: Cho ΔABC , chứng minh rằng: $l_A = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$.

Bài 15: Cho ΔABC , chứng minh rằng:
$$\frac{\cos \frac{A}{2}}{l_A} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{l_B} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{l_C} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Bài 16: Cho ΔABC , chứng minh rằng:
$$\frac{1}{l_A} + \frac{1}{l_B} + \frac{1}{l_C} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Bài 17: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn có $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$. Chứng minh rằng diện tích của tứ giác đã cho là $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

Bài 18: Cho ΔABC , chứng minh rằng:
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc} = \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}.$$

Bài 19: Cho ΔABC có ba cạnh lần lượt là $a = x^2 + x + 1, b = 2x + 1, c = x^2 - 1$, chứng minh rằng tam giác có một góc bằng 120° .

Bài 20: Cho ΔABC , chứng minh rằng:
$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} R$$

Bài 21: Cho ΔABC , chứng minh rằng:
$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

Bài 22: Cho ΔABC có diện tích tam giác $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}(a+b-c)(a+c-b)$, chứng minh rằng tam giác đã cho là một tam giác vuông.

Bài 23: Cho ΔABC , chứng minh rằng: $R \geq 2r$.

Bài 24: Cho ΔABC , chứng minh rằng:
$$\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} \leq \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B).$$

Bài 25: Cho ΔABC , chứng minh rằng: $3S \geq 2R^2(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C)$.

Bài 26: Cho ΔABC , chứng minh rằng:
$$\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}.$$

Bài 27: Cho ΔABC , chứng minh rằng:
$$S^2 \leq \frac{1}{16}(a^4 + b^4 + c^4).$$

Bài 28: Cho ΔABC , chứng minh rằng:
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A).$$

Bài 29: Cho ΔABC , chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2bc + 2ca$.

Bài 30: Cho ΔABC , chứng minh rằng:
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4r^2}.$$

Bài 31: Cho ΔABC , chứng minh rằng:
$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

Bài 32: Cho ΔABC , chứng minh rằng:
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

Bài 33: Cho ΔABC , chứng minh rằng:
$$\frac{h_b}{h_a^2} + \frac{h_c}{h_b^2} + \frac{h_a}{h_c^2} > \frac{1}{r}.$$

Bài 34: Cho ΔABC có $\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$, chứng minh rằng: $A \leq 60^\circ$.

Bài 35: Cho ΔABC có $a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$, chứng minh rằng: Tam giác có một góc tù.

Bài 36: Cho ΔABC có $a^2 + b^2 + c^2 = 36r^2$, chứng minh rằng: Tam giác đã cho là tam giác đều.