



Chuyên đề: Hàm Số

BÀI TOÁN NHẬN BIẾT ĐỒ THỊ HÀM SỐ

PHƯƠNG PHÁP

Bài toán 1. Nhận biết các hệ số của hàm bậc 3 dựa vào đồ thị

Hàm bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

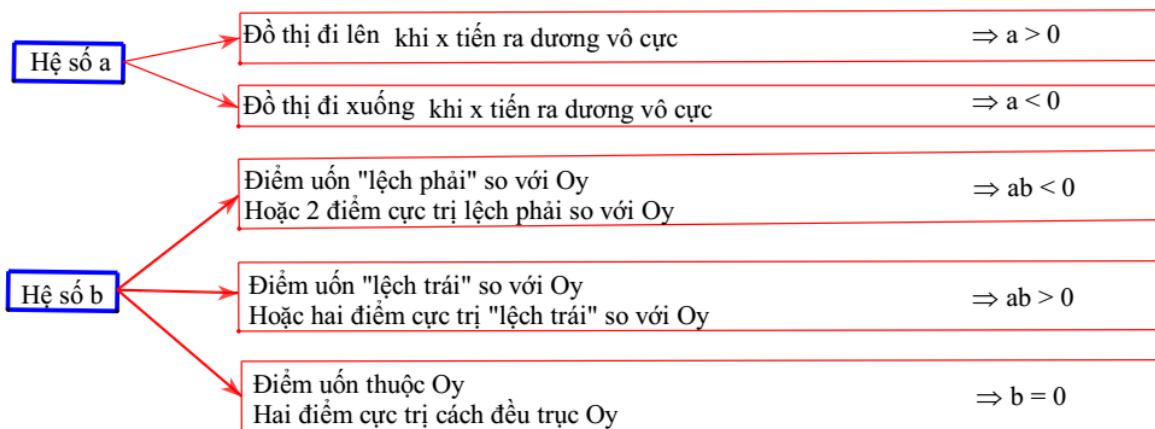
$$y' = 3ax^2 + 2bx + c ; \Delta'_{y'} = b^2 - 3ac$$

- Hàm số không có điểm cực trị $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} \leq 0$.
- Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} > 0$.
- Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số. Theo Viet ta có:

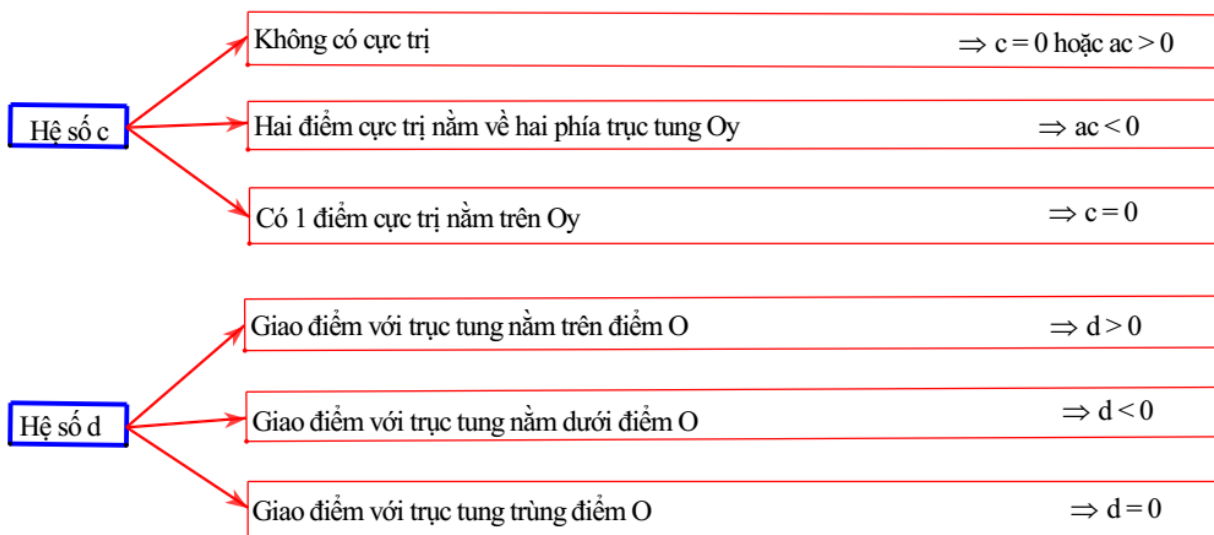
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$$

- Với $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{3a}$ chính là hoành độ của điểm uốn.

Cách nhận biết dấu của các hệ số



Chuyên đề: Hàm Số

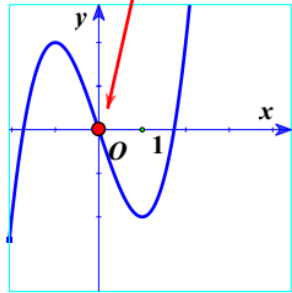
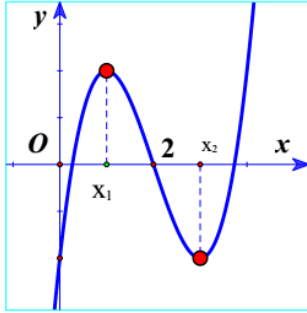
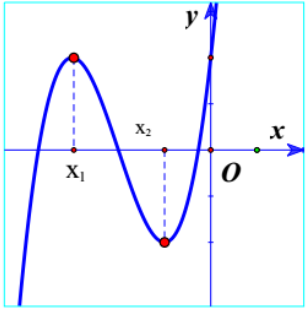


Hệ số	Tiêu chí	Điều kiện	Minh họa
a	Dựa vào xu hướng đi lên hay đi xuống của phần cuối đồ thị nằm bên phải	Đi lên $\Rightarrow a > 0$.	
		Đi xuống $\Rightarrow a < 0$	
d	Dựa vào vị trí giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung (Oy).	Nằm phía trên gốc tọa độ $O \Rightarrow d > 0$	<p>Giao điểm với trục tung nằm trên điểm O ($d > 0$)</p>

Chuyên đề: Hàm Số

		<p>Nằm dưới gốc tọa độ $O \Rightarrow d < 0$.</p>	<p>Giao điểm với trục tung nằm dưới điểm O ($d < 0$)</p>
		<p>Đi qua gốc tọa độ $O \Rightarrow d = 0$.</p>	<p>Giao điểm với trục tung trùng với điểm O ($d = 0$)</p>
b	<p>Dựa vào vị trí của điểm uốn so với trục Oy</p>	<p>Điểm uốn nằm phía phải Oy</p> $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0$ $\Rightarrow ab < 0$	<p>Điểm uốn nằm bên "phải" $Oy \Rightarrow ab < 0$ Trong trường hợp này $a > 0 \Rightarrow b < 0$</p>
		<p>Điểm uốn nằm phía trái Oy</p> $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} < 0$ $\Rightarrow ab < 0$	<p>Điểm uốn nằm bên "trái" $Oy \Rightarrow ab > 0$ Trong trường hợp này $a > 0 \Rightarrow b > 0$</p>

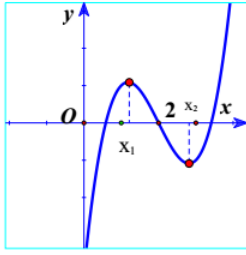
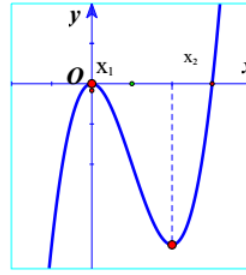
Chuyên đề: Hàm Số

		<p>Điểm uốn nằm phía trên trục Oy</p> $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} = 0$ $\Rightarrow b = 0$	<p>Điểm uốn trùng gốc tọa độ O $\Rightarrow b = 0$</p> 
<p>Dựa vào vị trí của 2 điểm cực trị so với trục Oy</p>	<p>2 điểm cực trị nằm lệch về phía bên phải Oy</p> $\Rightarrow ab < 0$ $(x_1 + x_2 > 0)$	<p>2 điểm cực trị lệch về bên "phải" Oy</p> $x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow ab < 0$ <p>Trong trường hợp này $a > 0 \Rightarrow b < 0$.</p>	
	<p>2 điểm cực trị nằm lệch về phía bên trái Oy</p> $\Rightarrow ab > 0$ $(x_1 + x_2 < 0)$	<p>2 điểm cực trị lệch về bên "trái" Oy</p> $x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow ab > 0$ <p>Trong trường hợp này $a > 0 \Rightarrow b > 0$.</p>	

Chuyên đề: Hàm Số

		<p>Khoảng cách 2 điểm cực trị đến Oy bằng nhau $\Rightarrow b = 0$ $(x_1 + x_2 = 0)$</p>	<p>Hai điểm cực trị cách đều trục Oy (Khoảng cách từ 2 điểm cực trị đến trục tung bằng nhau) $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow b = 0$</p>
c	Cực trị	<p>Không có cực trị $c = 0$ hoặc $ac > 0$.</p>	<p>Đồ thị hàm số không có cực trị $c = 0$ hoặc $ac > 0$</p>
		<p>Có 2 điểm cực trị nằm 2 phía trục oy $\Rightarrow ac < 0$.</p>	<p>Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục tung Oy $\Rightarrow ac < 0$. Trong trường hợp này, $a > 0 \Rightarrow c < 0$</p>

Chuyên đề: Hàm Số

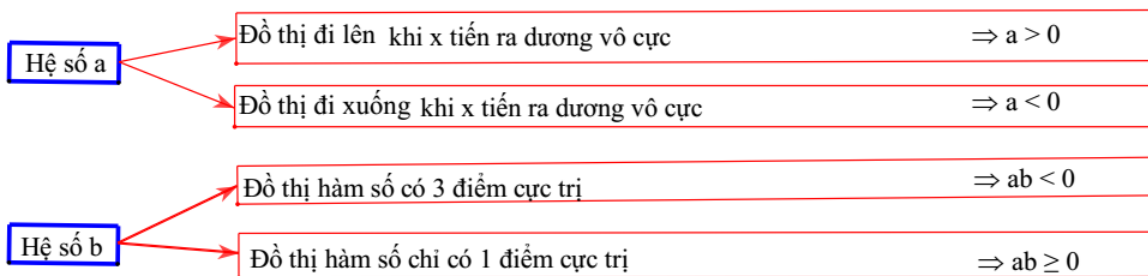
		<p>Có 2 điểm cực trị nằm cùng phía trục $Oy \Rightarrow ac > 0$.</p>	<p>Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm cùng phía so với trục tung $Oy \Rightarrow ac > 0$. Trong trường hợp này, $a > 0 \Rightarrow c > 0$</p> 
		<p>Có 1 điểm cực trị thuộc trục tung Oy. $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} = 0 \Rightarrow c = 0$.</p>	<p>Đồ thị hàm số có 1 điểm cực trị nằm trên trục tung $Oy \Rightarrow c = 0$</p> 

Bài toán 2: Nhận biết các hệ số hàm bậc 4 (trùng phương) dựa vào đồ thị

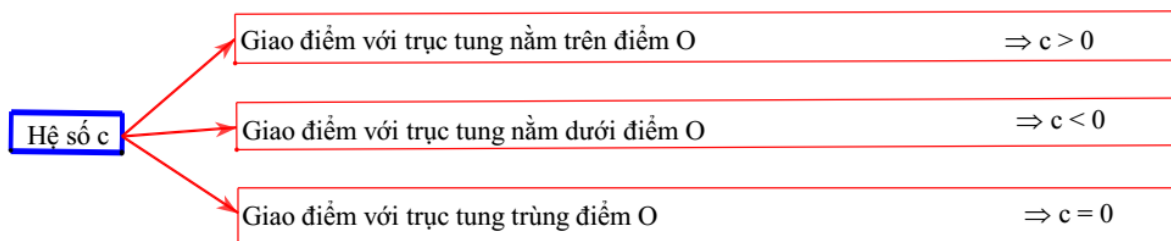
Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

$$y' = 4ax^3 + 2bx = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

Nhận biết dấu của các hệ số.

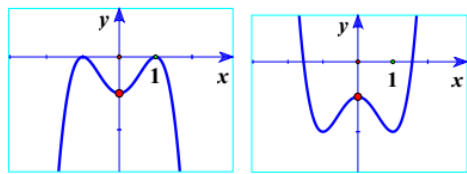
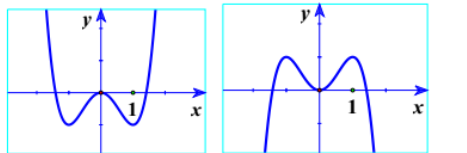


Chuyên đề: Hàm Số



Hệ số	Tiêu chí	Điều kiện	Minh họa
a	Dựa vào xu hướng đi lên hay đi xuống của phần cuối đồ thị nằm bên phải	Đi lên $\Rightarrow a > 0$.	
		Đi xuống $\Rightarrow a < 0$	
b	Dựa vào số điểm cực trị của hàm số	Có 1 điểm cực trị $\Rightarrow ab \geq 0$.	
		Có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$	
c	Dựa vào giao điểm của đồ thị hàm số	Nằm phía trên gốc tọa độ O $\Rightarrow c > 0$	

Chuyên đề: Hàm Số

	với trục tung (Oy).	Nằm dưới gốc tọa độ $O \Rightarrow c < 0.$	
		Đi qua gốc tọa độ $O \Rightarrow c = 0.$	

Bài toán 3: Nhận biết các hệ số của hàm số bậc nhất trên bậc nhất dựa vào đồ thị

Hàm số: $y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0; c \neq 0)$

- Đạo hàm: $y' = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$
- Tiệm cận đứng: $x = -\frac{d}{c}$. ($d = 0 \Rightarrow$ tiệm cận đứng là trục Oy : $x = 0.$)
- Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$. ($a = 0 \Rightarrow$ tiệm cận ngang là trục Ox : $y = 0$)
- Giao Ox $\Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ với $a \neq 0$; Nếu $a = 0$ thì không cắt Ox.
- Giao Oy $\Rightarrow y = \frac{b}{d}$

Với hàm số có các tham số là các giá trị cụ thể. Ta dựa vào các tiêu chí để nhận dạng:

- Dựa vào tiệm cận đứng + tiệm cận ngang
- Dựa vào giao Ox, Oy
- Dựa vào sự đồng biến, nghịch biến

Với hàm số có chứa tham số .

Ta nhận biết dấu của 6 cặp tích số sau:

ab : Dựa vào vị trí giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox : $x = -\frac{b}{a}$.



Chuyên đề: Hàm Số

ac : Dựa vào vị trí đường tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$.

bd : Dựa vào vị trí giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy : $y = \frac{b}{d}$.

cd : Dựa vào vị trí đường tiệm cận đứng: $y = -\frac{d}{c}$.

ad : Dựa vào vị trí giao điểm của đồ thị hàm số với các trục tọa độ **HOẶC** dựa vào vị trí đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

bc : Dựa vào vị trí giao Ox và tiệm cận ngang **HOẶC** dựa vào vị trí giao Oy với tiệm cận đứng.





Chuyên đề: Hàm Số

Bài toán 4: Nhận biết đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

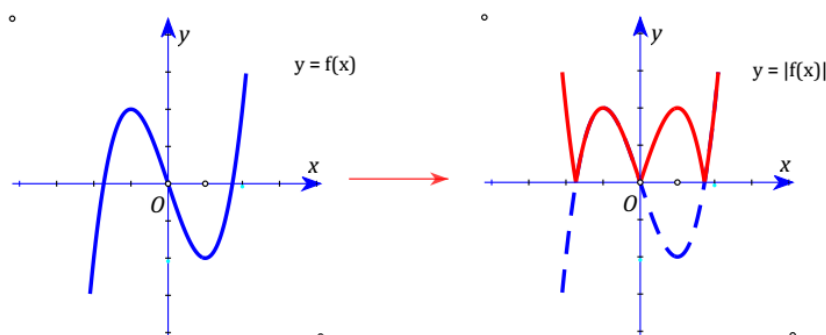
Dạng 1. Từ đồ thị hàm số $f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $|f(x)|$

Khẩu hiệu: Trên giữ nguyên, dưới lấy đối xứng lên trên

Chuyên đề: Hàm Số

Nghĩa là: Toàn bộ đồ thị nằm **phía trên** Ox của $f(x)$ được giữ nguyên.

Toàn bộ đồ thị nằm **phía dưới** Ox của $f(x)$ được lấy đối xứng lên trên.

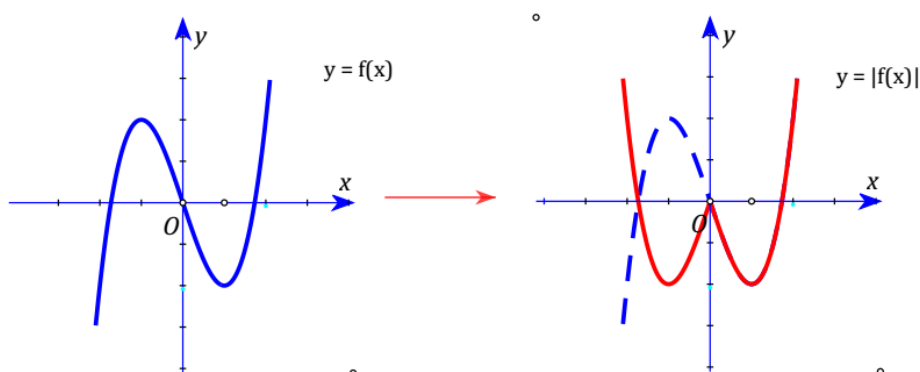


Dạng 2. Từ đồ thị hàm số $f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $f(|x|)$

Khẩu hiệu: Phải giữ nguyên, lấy đối xứng sang trái.

Nghĩa là: Toàn bộ đồ thị nằm **phía bên phải** Oy của $f(x)$ được giữ nguyên, phần bên trái Oy của $f(x)$ **bỏ đi**.

Lấy đối xứng phần bên phải sang trái.



Dạng 3. Từ đồ thị hàm số $f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $|x-a|g(x)$ với $(x-a).g(x) = f(x)$

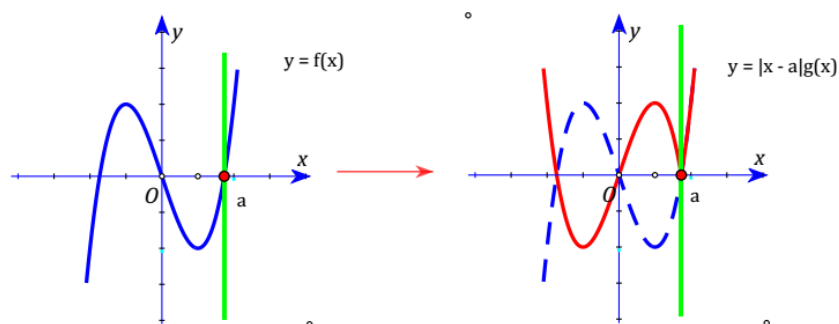
Khẩu hiệu: Phải a giữ nguyên, trái a lấy đối xứng qua Ox.

Nghĩa là:

Toàn bộ đồ thị ứng với $x > a$ của $f(x)$ (Nằm phía bên phải đường thẳng $x = a$) được giữ nguyên.

Chuyên đề: Hàm Số

Toàn bộ đồ thị ứng với $x < a$ của $f(x)$ (Nằm phía bên trái đường thẳng $x = a$) lấy đối xứng qua Ox .



Bài toán 5: Nhận biết hàm số dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$

- Số **giao điểm** với trục hoành \Rightarrow số lần đổi dấu của $f'(x) \Rightarrow$ số điểm cực trị
- Nằm trên hay dưới trục hoành $\Rightarrow f'(x) > 0$ hoặc $f'(x) < 0$ trên 1 miền \Rightarrow Tính đơn điệu của hàm số.



Chuyên đề: Hàm Số

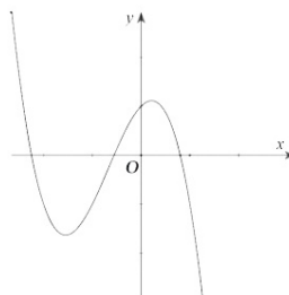
BÀI TẬP ÁP DỤNG

Hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Câu 1:

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
- B. $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.



Hướng dẫn:

Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a < 0 \Rightarrow$ loại phương án C.

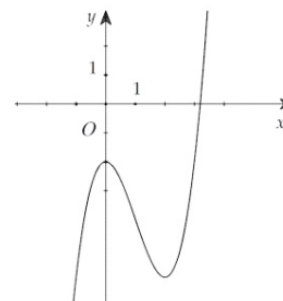
Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 trái dấu (do hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm hai phía với Oy) $\Rightarrow x_1 x_2 = \frac{c}{3a} < 0 \Rightarrow c > 0 \Rightarrow$ loại phương án D.

Do $(C) \cap Oy = D(0; d) \Rightarrow d > 0$. Mà: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow b < 0 \Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 2:

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.
- B. $y = x^4 + 2x^2$.
- C. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.
- D. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.



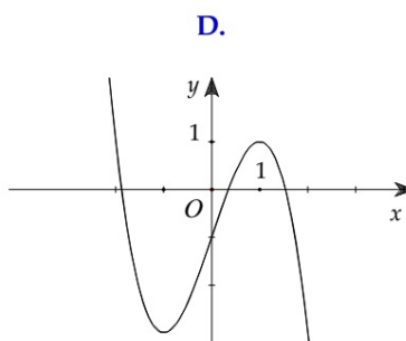
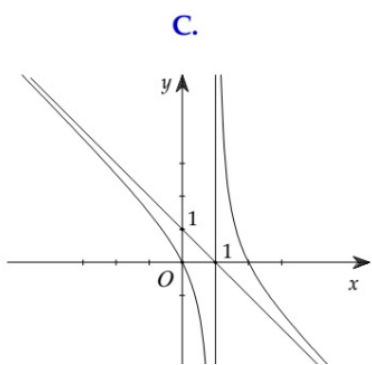
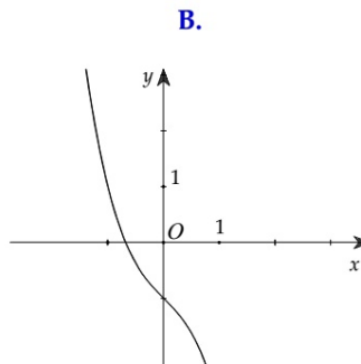
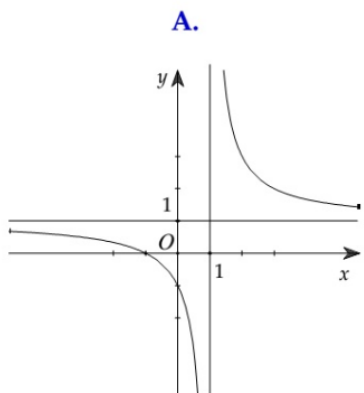
Hướng dẫn:

Dựa vào đồ thị ta thấy đây là đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) với $a > 0$ và hàm số có 2 điểm cực trị \Rightarrow **Chọn đáp án C.**

Chuyên đề: Hàm Số

Câu 3:

Trong các hàm số được cho bởi các đồ thị sau, hàm số nào nghịch biến trên \mathbb{R} ?



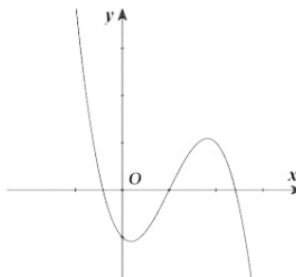
Hướng dẫn:

Ta thấy đồ thị hàm số ở đáp án A, là đường cong đi xuống từ trái sang phải trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 4:

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0.$
- B.** $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0.$
- C.** $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0.$
- D.** $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0.$



Hướng dẫn:

Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a < 0 \Rightarrow$ loại phương án A, C. Ta có:

$y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 cùng dấu (do hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm cùng một phía với Oy) $\Rightarrow x_1 x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c < 0 \Rightarrow$ loại phương án D. Do $(C) \cap Oy = D(0; d) \Rightarrow d < 0$. Mà:

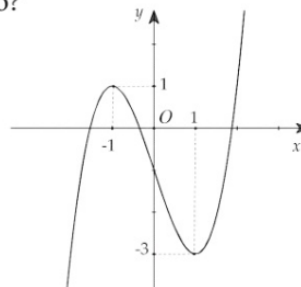
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow b > 0 \Rightarrow \text{Chọn đáp án B.}$$

Chuyên đề: Hàm Số

Câu 7:

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = x^3 - 3x + 2$ B. $y = x^3 - 3x - 1$.
 C. $y = -x^3 - 3x^2$. D. $y = -x^3 - 2x$.



Hướng dẫn:

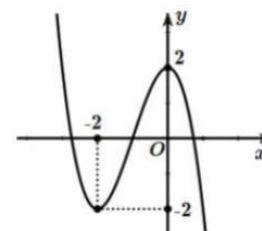
Dựa vào đồ thị, nhận xét đây là đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) với $a > 0$ và hàm số có 2 điểm cực trị với $y_{CT} \cdot y_{CD} < 0$.

\Rightarrow **Chọn đáp án B.**

Câu 8:

Hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = x^3 + 3x^2 - 2$. B. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.
 C. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$. D. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.



Hướng dẫn:

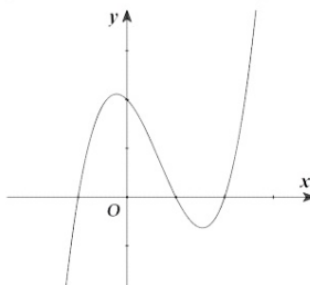
Dựa vào đồ thị nhận thấy đây là đồ thị hàm số bậc 3 $y = a x^3 + b x^2 + c x + d$ ($a \neq 0$) với $a < 0$ và đồ thị hàm số có 2 cực trị là $x_1 = -2; x_2 = 0$

\Rightarrow **Chọn đáp án C**

Câu 9:

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
 B. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.
 C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
 D. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.





Chuyên đề: Hàm Số

Hướng dẫn:

Dựa vào đồ thị ta suy ra hệ số $a > 0 \Rightarrow$ loại phương án **B**.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 trái dấu (do hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm hai phía với Oy) $\Rightarrow x_1 x_2 = \frac{c}{3a} < 0 \Rightarrow c < 0 \Rightarrow$ loại phương án **D**. Do $(C) \cap Oy = D(0; d) \Rightarrow d > 0$. Mà

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow b < 0 \Rightarrow \text{Chọn đáp án C.}$$

Hàm số bậc 4: $y = ax^4 + bx^2 + c$

Câu 1:

Đồ thị hàm số nào sau đây luôn nằm dưới trục hoành

A. $y = x^4 + 3x^2 - 1$

B. $y = -x^3 - 2x^2 + x - 1$

C. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$

D. $y = -x^4 - 4x^2 + 1$

Hướng dẫn:

- Đồ thị hàm số luôn nằm dưới trục hoành khi và chỉ khi $y = f(x) < 0; \forall x \in \mathbb{R}$

- Hàm số bậc ba bất kì luôn nhận được mọi giá trị từ $-\infty$ đến $+\infty$ nên ta có thể loại ngay hàm này, tức là đáp án B sai. Tiếp tục trong ba đáp án còn lại, ta có thể loại ngay đáp án A vì hàm bậc 4 có hệ số bậc cao nhất x^4 là 1 nên hàm này có thể nhận giá trị $+\infty$. Trong hai đáp án C và D ta cần làm rõ:

C. $y = -x^4 + 2x^2 - 2 = -(x^2 - 1)^2 - 1 < 0$

D. $y = -x^4 - 4x^2 + 1 = -(x^2 + 2)^2 + 5 > 0$. Thấy ngay tại $x = 0$ thì $y = 10$ nên loại ngay đáp án này.

\Rightarrow **Chọn đáp án C.**

Câu 2:

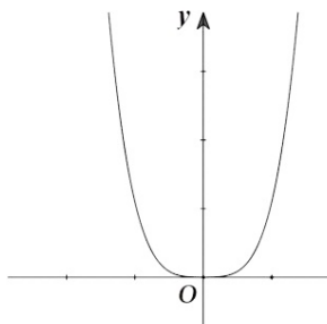
Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c = 0$.

B. $a > 0, b < 0, c < 0$.

C. $a < 0, b \leq 0, c = 0$.

D. $a > 0, b \geq 0, c = 0$.



Hướng dẫn:

Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a > 0 \Rightarrow$ loại phương án **C**. Hàm số có 1 điểm

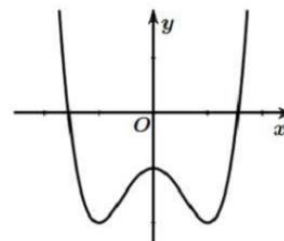
cực trị $\Rightarrow ab \geq 0$, do $a > 0 \Rightarrow b \geq 0$. Mà: $(C) \cap Oy = O(0;0) \Rightarrow c = 0 \Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Chuyên đề: Hàm Số

Câu 3:

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = x^4 - 2x^2 - 1.$
- B. $y = x^4 + 2x^2 + 1.$
- C. $y = x^3 - 3x^2 - 2.$
- D. $y = -x^3 + 3x^2 + 2.$



Hướng dẫn:

Dựa vào hình dạng của đồ thị hàm số thì ta loại đi phương án C và D.

Từ đồ thị hàm số, ta suy ra bảng biến thiên có dạng:

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$			
y'		-	0	+	0	-	0	+
y	↘		↗		↘		↗	

Ta có, hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ có ba điểm cực trị và hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 1$ có một điểm cực trị.

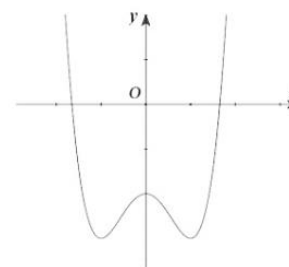
⇒ **Chọn đáp án A.**

Câu 4:

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a > 0, b > 0, c < 0.$
- B. $a > 0, b < 0, c < 0.$
- C. $a > 0, b < 0, c > 0.$
- D. $a < 0, b > 0, c < 0.$



Hướng dẫn:

Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a > 0 \Rightarrow$ loại phương án D. Hàm số có 3 điểm cực trị $\Rightarrow ab < 0$, do $a > 0 \Rightarrow b < 0$. Mặt khác: $(C) \cap Oy = D(0;c) \Rightarrow c < 0 \Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

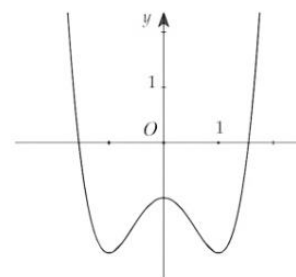


Chuyên đề: Hàm Số

Câu 5:

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = x^4 - 2x^2 - 1.$
- B. $y = -x^4 + 2x^2.$
- C. $y = x^3 - 3x^2 - 2.$
- D. $y = -x^3 + 3x^2 + 2.$



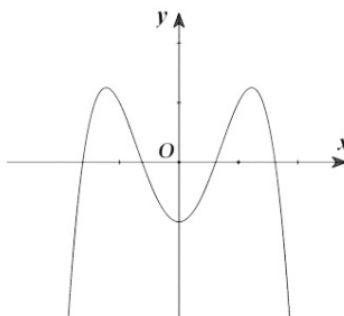
Hướng dẫn:

Dựa vào đồ thị, nhận xét đây là đồ thị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) với $a > 0$ và hàm số có 3 điểm cực trị \Rightarrow **Chọn đáp án A.**

Câu 6:

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c < 0.$
- B. $a > 0, b < 0, c < 0.$
- C. $a < 0, b < 0, c < 0.$
- D. $a > 0, b < 0, c > 0.$



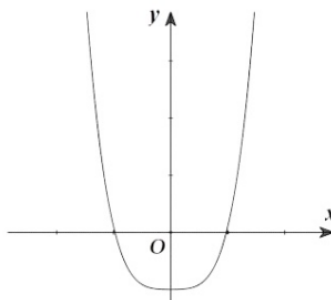
Hướng dẫn:

Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a < 0 \Rightarrow$ loại phương án **D.** Hàm số có 3 điểm cực trị $\Rightarrow ab < 0$, do $a < 0 \Rightarrow b > 0$. Mà $(C) \cap Oy = D(0;c) \Rightarrow c < 0 \Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 7:

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c < 0.$
- B. $a > 0, b \geq 0, c < 0.$
- C. $a < 0, b \leq 0, c < 0.$
- D. $a < 0, b < 0, c > 0.$



Hướng dẫn:

Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a > 0 \Rightarrow$ loại phương án **A,C.** Hàm số có 1 điểm cực trị $\Rightarrow ab \geq 0$, do $a > 0 \Rightarrow b \geq 0$. Mà: $(C) \cap Oy = D(0;c) \Rightarrow c < 0 \Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

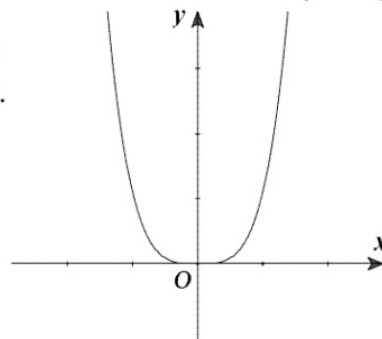


Chuyên đề: Hàm Số

Câu 8:

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a > 0, b < 0, c = 0.$
- B. $a > 0, b < 0, c < 0.$
- C. $a < 0, b \leq 0, c = 0.$
- D. $a > 0, b \geq 0, c = 0.$



Hướng dẫn:

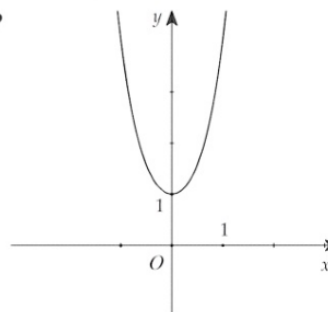
Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a > 0 \Rightarrow$ loại phương án C. Hàm số có 1 điểm cực trị $\Rightarrow ab \geq 0$, do $a > 0 \Rightarrow b \geq 0$. Mặt khác: $(C) \cap Oy = O(0;0) \Rightarrow c = 0$.

\Rightarrow Chọn đáp án D.

Câu 9:

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = x^4 - 2x^2 + 1.$
- B. $y = x^4 + 2x^2 + 2.$
- C. $y = -x^4 + 2x^2.$
- D. $y = x^4 + 2x^2 + 1.$



Hướng dẫn:

Dựa vào đồ thị, nhận xét đây là đồ thị hàm số trùng phương

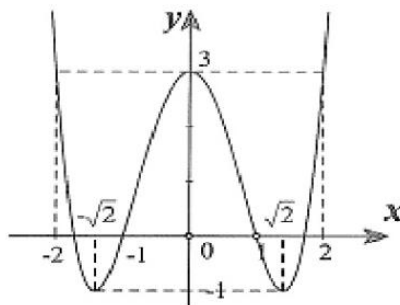
$y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) với $a > 0$, đi qua điểm $A(0;1)$ và hàm số có 1 điểm cực trị

\Rightarrow Chọn đáp án D.

Chuyên đề: Hàm Số

Câu 10:

Hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Hàm số $y = f(x)$ là hàm số nào trong bốn hàm số sau:

A. $y = (x^2 + 2)^2 - 1$

B. $y = (x^2 - 2)^2 - 1$

C. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$

D. $y = -x^4 + 4x^2 + 3$

Hướng dẫn:

Dựa vào đồ thị ta thấy đây là đồ thị hàm số bậc 4: $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$ với $a > 0$ có 3 điểm cực trị có hoành độ là: $x_1 = -\sqrt{2}; x_2 = 0; x_3 = \sqrt{2}$.

=> **Chọn đáp án B**

Câu 11:

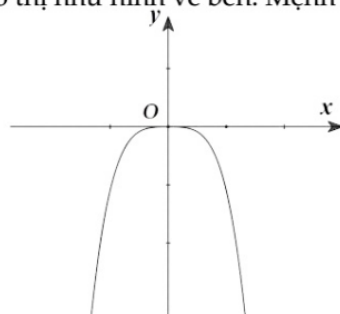
Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b < 0, c > 0.$

B. $a < 0, b \leq 0, c = 0.$

C. $a < 0, b > 0, c = 0.$

D. $a > 0, b \geq 0, c = 0.$



Hướng dẫn:

Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a < 0 \Rightarrow$ loại phương án D. Hàm số có 1 điểm

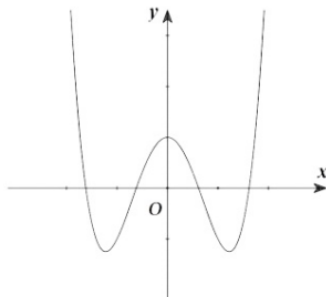
cực trị $\Rightarrow ab \geq 0$, do $a < 0 \Rightarrow b \leq 0$. Mà: $(C) \cap Oy = O(0;0) \Rightarrow c = 0 \Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Chuyên đề: Hàm Số

Câu 12:

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a > 0, b > 0, c < 0$.
- B. $a > 0, b < 0, c < 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c > 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c < 0$.



Hướng dẫn:

Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a > 0 \Rightarrow$ loại phương án **D**. Hàm số có 3 điểm

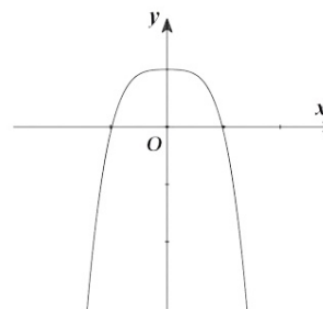
cực trị $\Rightarrow ab < 0$, do $a > 0 \Rightarrow b < 0$. Mà $(C) \cap Oy = D(0;c) \Rightarrow c > 0 \Rightarrow$ **Chọn đáp án C**.

Câu 13:

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ

bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a < 0, b < 0, c < 0$.
- B. $a < 0, b > 0, c < 0$.
- C. $a < 0, b \leq 0, c > 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c > 0$.



Hướng dẫn:

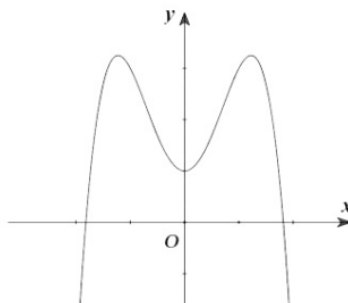
Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a < 0$. Hàm số có 1 điểm cực trị $\Rightarrow ab \geq 0$

Do $a < 0 \Rightarrow b \leq 0$. Mặt khác: $(C) \cap Oy = D(0;c) \Rightarrow c > 0 \Rightarrow$ **Chọn đáp án C**.

Câu 14:

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a < 0, b < 0, c > 0$.
- B. $a > 0, b < 0, c < 0$.
- C. $a < 0, b > 0, c > 0$.
- D. $a > 0, b < 0, c > 0$.



Hướng dẫn:

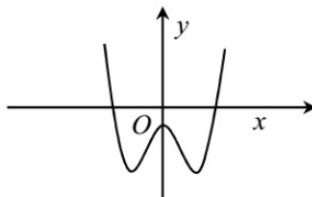
Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a < 0$. Hàm số có 3 điểm cực trị $\Rightarrow ab < 0$. Do $a < 0 \Rightarrow b > 0$. Mặt khác $(C) \cap Oy = D(0;c) \Rightarrow c > 0 \Rightarrow$ **Chọn đáp án C**



Chuyên đề: Hàm Số

Câu 15:

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên. Xác định dấu của a, b, c .



- A. $a > 0, b > 0, c < 0$ B. $a > 0, b < 0, c > 0$ C. $a > 0, b < 0, c < 0$ D. $a < 0, b < 0, c < 0$

Hướng dẫn:

Nhìn đồ thị thấy $a > 0$ dẫn đến loại D. Tại $x = 0$ thì $c < 0$ dẫn đến loại B.

Ta có $y' = 2x(2ax^2 + b) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt dẫn đến $b < 0$

⇒ **Chọn đáp án C.**

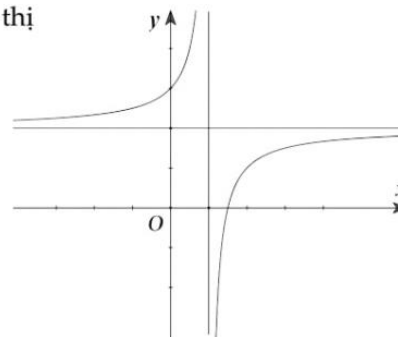
Hàm bậc nhất trên bậc nhất: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

Câu 1:

Cho hàm số $y = \frac{bx-c}{x-a}$ ($a \neq 0; a; b; c \in \mathbb{R}$) có dạng đồ thị

như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a > 0, b > 0, c - ab < 0$.
 B. $a < 0, b < 0, c - ab > 0$.
 C. $a < 0, b < 0, c - ab < 0$.
 D. $a > 0, b > 0, c - ab > 0$.



Hướng dẫn:

Đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng $x = a > 0$ và 1 tiệm cận ngang $y = b > 0$. Mặt khác, ta thấy dạng đồ thị là đường cong đi lên từ trái sang phải trên các khoảng xác định của nó nên

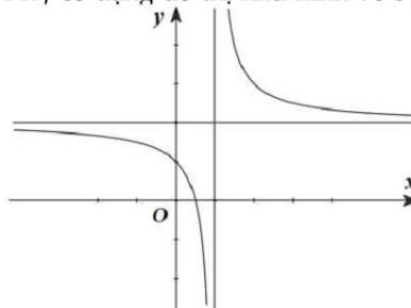
$$y' = \frac{c-ab}{(x-a)^2} > 0 \quad \forall x \neq a \Rightarrow c-ab > 0$$

⇒ **Chọn đáp án D.**

Chuyên đề: Hàm Số

Câu 2:

Cho hàm số $y = \frac{bx-c}{x-a}$ ($a \neq 0; a; b; c \in \mathbb{R}$) có dạng đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $a > 0, b > 0, c - ab < 0.$
- B. $a > 0, b < 0, c - ab < 0.$
- C. $a < 0, b > 0, c - ab < 0.$
- D. $a < 0, b < 0, c - ab > 0.$

Hướng dẫn:

Dựa vào đồ thị suy ra đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng $x = a > 0$ và 1 tiệm cận ngang $y = b > 0$. Mặt khác, ta thấy dạng đồ thị là đường cong *đi xuống* từ trái sang phải trên

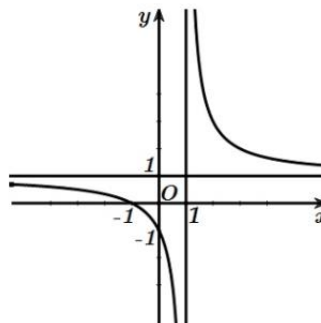
các khoảng xác định của nó nên $y' = \frac{c-ab}{(x-a)^2} < 0 \forall x \neq a \Rightarrow c - ab < 0$

\Rightarrow **Chọn đáp án A.**

Câu 3:

Hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \frac{2-x}{x-1}.$
- B. $y = \frac{x-1}{x+1}.$
- C. $y = \frac{x-2}{x-1}.$
- D. $y = \frac{x+1}{x-1}.$



Hướng dẫn:

Dựa vào đồ thị ta có đường tiệm cận đứng là $x = 1 \Rightarrow$ loại phương án B.

Đường tiệm cận ngang là $y = 1 \Rightarrow$ loại phương án A.

Mặt khác, đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1; 0) \Rightarrow$ loại phương án C.

Hình vẽ trên là đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}.$

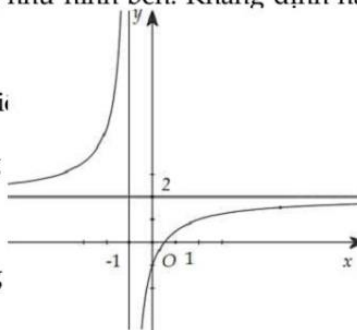
\Rightarrow **Chọn đáp án D.**

Chuyên đề: Hàm Số

Câu 4:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ chỉ có đúng một đường tiệm cận
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận ngang là $y = 2$, đường tiệm cận đứng là $x = -1$.
- C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận ngang là $y = 2$, đường tiệm cận đứng là $x = 1$.
- D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận ngang là $y = -1$, đường tiệm cận đứng là $x = 2$.



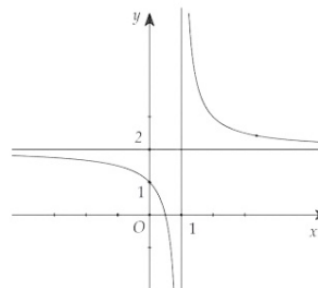
Hướng dẫn:

Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận ngang là $y = 2$, đường tiệm cận đứng là $x = -1 \Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 5:

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \frac{2x-2}{x-2}$.
- B. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.
- C. $y = \frac{2x-1}{x-1}$.
- D. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.



Hướng dẫn:

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0; ad - bc \neq 0$) qua điểm $A(0;1)$ có đường tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang $y = 2 \Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

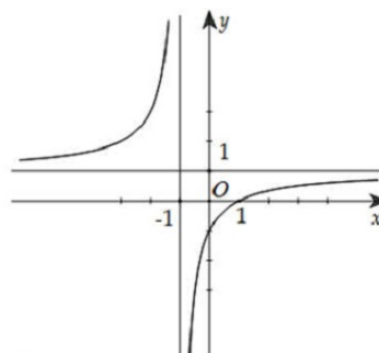


Chuyên đề: Hàm Số

Câu 6:

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = x^4 - 2x^2$.
- B. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.
- C. $y = \frac{x+1}{x-1}$.
- D. $y = \frac{x-1}{x+1}$.



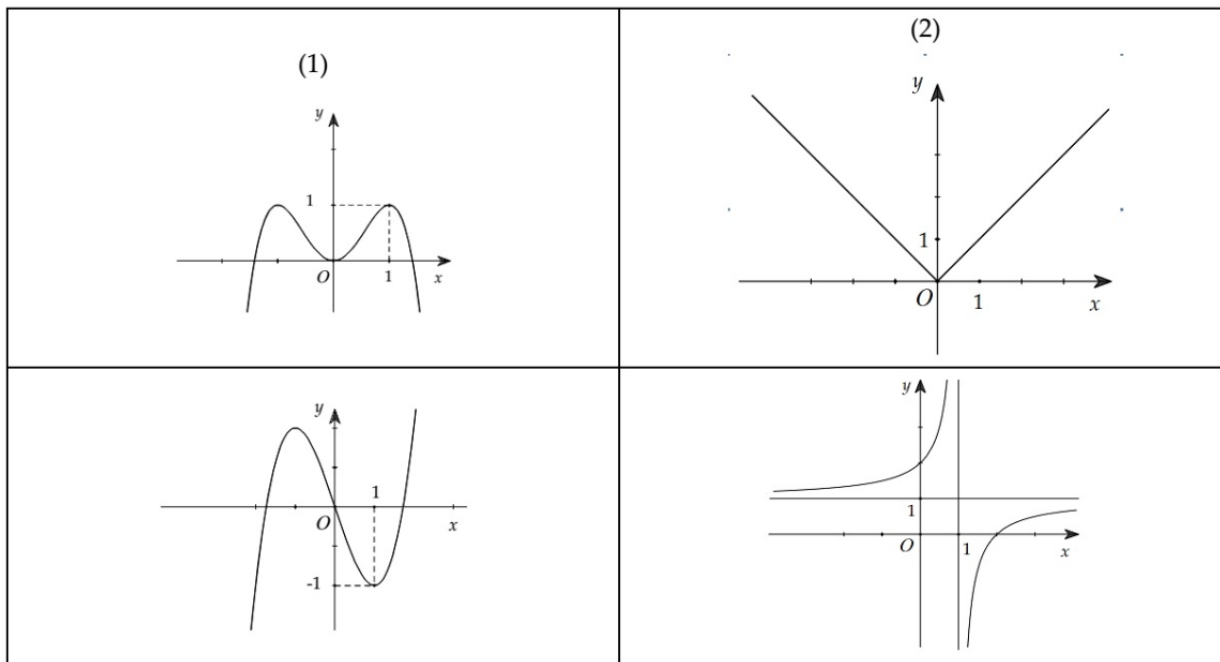
Hướng dẫn:

Dựa vào đồ thị ta thấy đây là đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $ad - cb > 0$, đi qua điểm $(0; 1)$ có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = 1$.

=> **Chọn đáp án D**

Câu 7:

Cho 4 hàm số có đồ thị dưới đây:



Hàm số không có cực trị là

- A. hàm số (1).
- B. hàm số (2).
- C. hàm số (3).
- D. hàm số (4).

Hướng dẫn:

Ta thấy đồ thị (4) là đồ thị của hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

nên hàm số không có cực trị => **Chọn đáp án D.**

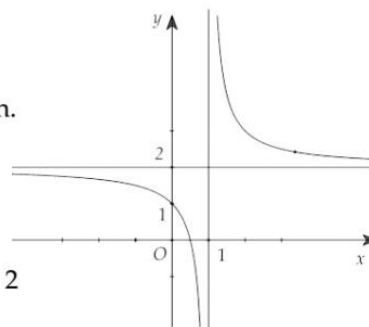


Chuyên đề: Hàm Số

Câu 8:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ chỉ có đúng một đường tiệm cận.
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận ngang là $y = 2$, đường tiệm cận đứng là $x = 0$.
- C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận ngang là $y = 2$ đường tiệm cận đứng là $x = 1$.
- D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận ngang là $y = 1$ đường tiệm cận đứng là $x = 2$.



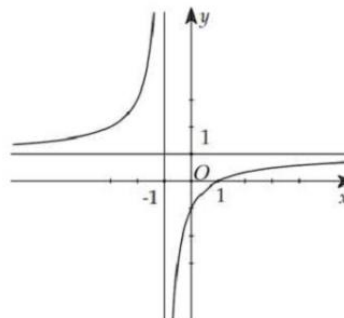
Hướng dẫn:

Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận ngang là $y = 2$, đường tiệm cận đứng là $x = 1 \Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 9:

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \frac{x+2}{x+1}$.
- B. $y = \frac{x-1}{x+1}$.
- C. $y = \frac{1-x}{x+1}$.
- D. $y = \frac{x}{x+1}$.



Hướng dẫn:

Dựa vào đồ thị, nhận xét đây là đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0; ad - bc \neq 0$) qua điểm $A(1;0)$, có đường tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = 1$.

\Rightarrow **Chọn đáp án B.**

Chuyên đề: Hàm Số

Câu 10:

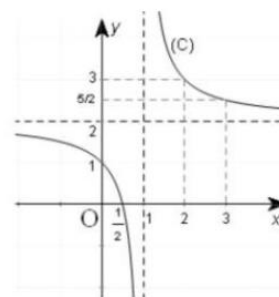
Đồ thị (C) cho ở hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

B. $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

C. $y = \frac{2x+1}{1-x}$

D. $y = \frac{4x+1}{2x-2}$



Hướng dẫn:

Đồ thị (C) có TĐĐ là $x=1$, TCN là $y=2$ và đi qua các điểm $(0;1), (\frac{1}{2};0)$ nên (C) là đồ thị hàm số

$$y = \frac{2x-1}{x-1}.$$

⇒ **Chọn đáp án B.**

Hàm số trị tuyệt đối và một số bài toán khác.

Câu 1:

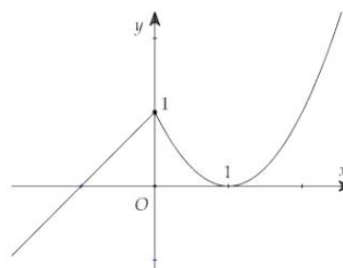
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số là

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.



Hướng dẫn:

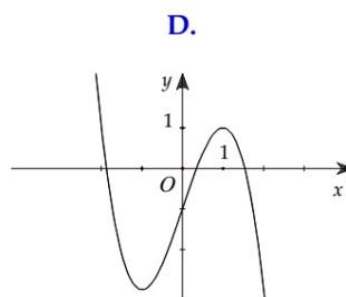
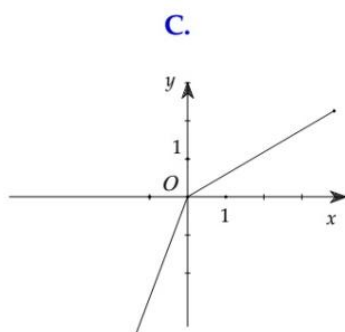
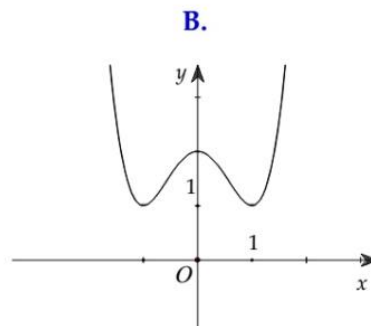
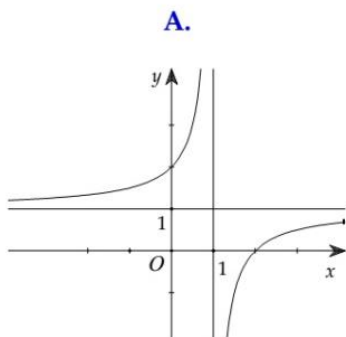
Dựa vào định nghĩa và quy tắc 1, hàm số đã cho có 2 điểm cực trị

⇒ **Chọn đáp án D.**

Chuyên đề: Hàm Số

Câu 2:

Trong các hàm số được cho bởi các đồ thị sau, hàm số nào đồng biến trên \mathbb{R} ?



Hướng dẫn:

Đồ thị hàm số ở đáp án C, là đường đi lên từ trái sang phải trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 3:

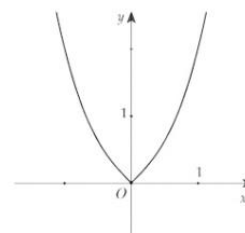
Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x^3 - 3x + 1.$

B. $y = |x|(x^2 + 1).$

C. $y = -x^4 + 2x.$

D. $y = \sqrt{x-1}.$



Hướng dẫn:

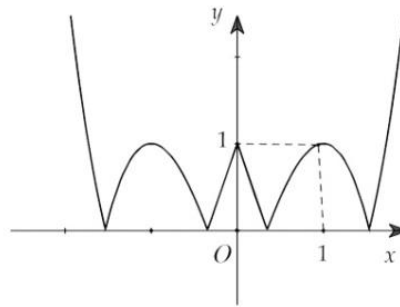
Dựa vào đồ thị ta thấy đây là đồ thị hàm số chẵn trên \mathbb{R} . Ta thấy hàm số $y = |x|(x^2 + 1)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Chuyên đề: Hàm Số

Câu 4:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số là

- A. nhỏ hơn 5. B. 6.
C. 7. D. 8.



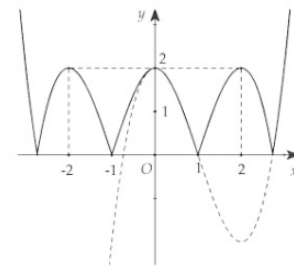
Hướng dẫn:

Dựa vào định nghĩa và quy tắc 1, hàm số đã cho có 7 điểm cực trị
⇒ **Chọn đáp án C.**

Câu 5:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình bên.
Số điểm cực trị của hàm số là

- A. 4. B. 5.
C. 6. D. 7.



Hướng dẫn:

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có 4 điểm cực tiểu nằm trên trục Ox và có 3 điểm cực đại lần lượt là: $(-2; 2)$, $(0; 2)$, $(2; 2)$.

⇒ **Chọn đáp án D**